

القسم العلمي

تطبيقات

كتاب الطالب

الرياضيات

الصف الثاني الثانوى



SAKKARA
PUBLISHING

تأليف

أ / كمال يونس كبشة

أ / سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د / نبيل توفيق الضبع

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو
تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر .

شركة سقارة للنشر

ش.م.م



الطبعة الأولى ٢٠١٥/٢٠١٦

رقم الإيداع ١٠٥٥٩ / ٢٠١٥

الرقم الدولى 5 - 016 - 706 - 977 - 978

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يشهد عالم اليوم تطوراً علمياً مستمراً ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقاً من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « تطبيقات الرياضيات » للصف الثانى الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « تطبيقات الرياضيات » ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى ثلاثة أجزاء الميكانيكا - الهندسة والقياس - الاحتمال، وكل جزء مقسم إلى وحدات متكاملة ومتراصة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهتدى إلى سواء السبيل

المحتويات

أولاً: الميكانيكا

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا. ٢

الوحدة الأولى

- ١-١ القوى. ١٢
- ٢-١ تحليل القوى. ٢٠
- ٣-١ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة. ٢٥
- ٤-١ اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة. ٣١
- ملخص الوحدة. ٤٣
- تمارين عامة. ٤٥
- اختبار تراكمي. ٤٧

الاستاتيكا

الوحدة الثانية

- ١-٢ الحركة المستقيمة. ٥٢
- ٢-٢ الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة. ٦٤
- ٣-٢ السقوط الحر. ٧٣
- ٤-٢ قانون الجذب العام. ٧٨
- ملخص الوحدة. ٨٣
- تمارين عامة. ٨٦
- اختبار تراكمي. ٨٨

الديناميكا

المحتويات

ثانيًا: الهندسة والقياس

الوحدة الثالثة

- ١ - ٣ المستقيمت والمستويات في الفراغ. ٩٢
- ٢ - ٣ الهرم والمخروط. ٩٨
- ٣ - ٣ المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط. ١٠٣
- ٤ - ٣ حجم الهرم والمخروط القائم. ١٠٧
- ٥ - ٣ معادلة الدائرة. ١١٢
- ملخص الوحدة. ١٢٣
- تمارين عامة . ١٢٤
- اختبار تراكمي ١٢٦

الهندسة والقياس

ثالثًا: الاحتمال

الوحدة الرابعة

- ١ - ٤ حساب الاحتمال. ١٣٠
- ملخص الوحدة. ١٤٧
- تمارين عامة . ١٤٩
- اختبار تراكمي ١٥٢

الاحتمال

- اختبارات عامة. ١٥٥
- إجابات بعض التمارين ١٦٦

الميكانيكا

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا

الميكانيكا بالمفهوم العام هو العلم الذي يقوم بدراسة حركة أو اتزان الأجسام المادية، وذلك باستخدام القوانين الخاصة بها، فمثلاً هناك قوانين تسري على دوران الأرض حول الشمس وإطلاق الصواريخ أو قذيفة المدفع أو غير ذلك. ويقصد بها التغير الذي يحدث بمرور الزمن لمواضع الأجسام المادية في الفراغ، والتأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام هو التأثير الذي تتغير له حركة هذه الأجسام، طبقاً لتأثيرات القوى المختلفة عليها، لذلك فإن المسألة الأساسية في الميكانيكا هي دراسة القوانين العامة لحركة واتزان الأجسام المادية تحت تأثير القوى عليها. ويمكن تقسيم الميكانيكا إلى قسمين هما:

الإستاتيكا^١ Statics

(علم توازن الأجسام) يبحث في سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من المؤثرات تسمى القوى، وتوصف القوى التي لا تُغير من حالة الجسم بأنها متزنة، ويقال للجسم: إنه في حالة توازن تحت تأثير هذه القوى. وقد بدأت الدراسة العامة لاتزان الأجسام (الإستاتيكا) في العصور القديمة نتيجة لمتطلبات الإنتاج البسيطة في هذا الوقت كالرافعة والبوابة والمستوى المائل وغيرها) وكان لمؤلفات أرشميدس دور مهم في هذا الوقت لترسيخ علم الإستاتيكا.

الديناميكا^٢ Dynamics

(علم حركة الأجسام) والتي تتضمن قوانين حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى، وتنقسم الديناميكا إلى: **الكينماتيكا Kinematics** وهي تبحث في خصائص الحركة من الوجهة الهندسية (وصف الحركة وصفاً مجرداً دون التعرض للقوى المسببة لها)، و**الكيناتيكا Kinetics** وهي تبحث في تأثير القوى المسببة أو المغيرة للحركة، وقد تلت الديناميكا في دراستها الإستاتيكا بأمد طويل؛ نتيجة النهضة في مجالات النقل والتجارة والصناعة والإنتاج وصناعة الأسلحة والاكتشافات الفلكية.

وهناك:

ميكانيكا النقطة المادية (أي الجسم الذي يمكن إهمال أبعاده عند بحث حركته أو اتزانه).

ميكانيكا الجسم الجاسئ Rigid Body (أي الجسم المكون من عدد كبير جداً من الجسيمات المترابطة مع بعضها البعض؛ بحيث إن المسافة بين أي جسيمين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي مؤثر خارجي).

١ سوف ندرس في هذه الوحدة مفهوم القوة وخواصها ووحدات قياسها وتحليل القوة إلى مركبتين، وإيجاد محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة، ثم دراسة اتزان نقطة مادية تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة، وتطبيقات عليها.

٢ سوف ندرس في هذه الوحدة (الكينماتيكا) وهي التي تختص بوصف حركة الأجسام دون التعرض للقوى المسببة لها، وتتناول هذه الدراسة حركة الأجسام، والظواهر المصاحبة لهذه الحركة، ومسببات الحركة وقوانينها، وتطبيقات على الحركة الأفقية والرأسية بعجلة منتظمة، وقانون الجذب العام لنيوتن.

ميكانيكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة (توجد لبعض الأنظمة والأجسام تغيرات تطرأ عليها تتغير فيها الكتلة بتغير الزمن كأن ينفصل عنها أو يتحد بها جسيمات تنقص أو تزيد من كتلتها في أثناء الحركة، ومن هذه الأجسام الصواريخ النفاثة وعربات المناجم التي تتغير كتلتها نتيجة استهلاك الوقود وغيرها من الأنظمة المختلفة).

ميكانيكا الأجسام القابلة للتشكيل (**المرونة Elasticity**) هي خاصية الأجسام التي لها القدرة على الرجوع إلى شكلها وأبعادها الأصلية بعد تشكيلها، أما **اللدونة Plasticity** وهي عند تعرض الأجسام إلى مؤثرات خارجية تتغير أشكالها ولا تعود إلى حالتها الطبيعية عند زوال المؤثر الخارجي.

تطور علم الميكانيكا:

الميكانيكا الكلاسيكية Classical mechanics

تعد أقدم فروع الميكانيكا حيث تهتم بدراسة القوى التي تؤثر على الأجسام، كما تهتم بتفسير حركة الكواكب وتساعد كذلك في العديد من التقنيات الحديثة (الهندسة الإنشائية والهندسة المدنية والملاحظة الفضائية ...).

ميكانيكا الكم Quantum mechanics

هي مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت في القرن العشرين، وذلك لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات، وقد دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية ليظهر مصطلح ازدواجية (الموجة - الجسيم)، وبهذا أصبح ميكانيكا الكم مسئولة عن التفسير الفيزيائي على المستوى الذري، لذلك ميكانيكا الكم هي تعميم للفيزياء الكلاسيكية لإمكانية تطبيقها على المستويين الذري والعادي، وسبب تسميتها بميكانيكا الكم يعود إلى أهمية الكم في بنائها (وهو مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمية من الطاقة يمكن تبادلها بين الجسيمات، ويستخدم للإشارة إلى كميات الطاقة المحددة التي تنبعث بشكل متقطع، وليس بشكل مستمر).

ميكانيكا الموائع Fluid Mechanics

هي أحد فروع ميكانيكا الكم وهي تدرس أساساً الموائع (السوائل والغازات)، ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائي لهذه المواد، وتنقسم إلى إستاتيكا الموائع ودراساتها في حالة عدم الحركة وديناميكا الموائع ودراساتها في حالة الحركة

الميكانيكا الحيوية Biomechanics

علم الميكانيكا الحيوية (البيوميكانيك) هو علم دراسة القوانين العامة في حركة أي كائن حي والتحليل الميكانيكي لحركة الأجسام الحية من جميع النواحي (التشريحية - الفسيولوجية - البدنية - الميكانيكية ...)، والذي يتعامل مع القوة على الأجسام الحية سواء كانت في حالة السكون أو الحركة، ومن أمثلة ذلك: حركة الأمعاء، وتدفق الدم في الشرايين، وانتقال البويضة في قناة فالوب، وانتقال السوائل في الحالب من الكلية إلى المثانة، وعملية هضم الطعام وحركته، ومن خلال التحليل الميكانيكي يمكن التوصل إلى حالات جديدة وملائمة لتطوير مستوى الأداء.

النظرية النسبية العامة General relativity theory

النظرية النسبية لأينشتاين غيّرت الكثير من المفاهيم فيما يتعلق بالمصطلحات الأساسية في الفيزياء: المكان، الزمان الكتلة والطاقة؛ حيث أحدثت نقلة نوعية في الفيزياء النظرية وفيزياء الفضاء في القرن العشرين. قامت نظرية النسبية بتحويل مفهوم الحركة، حيث نصّت بأنّ كل الحركة نسبية. ومفهوم الوقت تغيّر من كونه ثابتاً ومحدداً، إلى كونه بُعداً آخر غير مكاني. وجعلت الزمان والمكان شيئاً موحداً بعد أن كان يتم التعامل معهما كشيئين مختلفين. وجعلت مفهوم الوقت يتوقّف على سرعة الأجسام، وأصبح تقلص البعد وتمدد الزمن مفهوماً أساسياً لفهم الكون. وبذلك تغيّرت كل الفيزياء الكلاسيكية النيوتونية.

نشاط



١ - استخدم الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) في البحث عن دور علماء الرياضيات في تطور علم الميكانيكا وإليك بعض نتائج البحث:

كان للعالم الإنجليزي إسحق نيوتن Isaac Newton الفضل في تمهيد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسيكية عن طريق قوانين الحركة التي فسرت الكثير من الظواهر الطبيعية والفلكية، كما كان للعالم الألماني يوهانز كيبلر Johannes Kepler وجاليليو جاليلي الإيطالي Galileo Galilei دور عظيم في وضع قوانين تصف حركة الكواكب؛ حيث بينت قوانين كيبلر أن هناك قوة تجاذب بينها، وبينت أيضاً حركة الكواكب حول الشمس وفق المنظور الجديد الذي يعتمد على مركزية الشمس بشكل أصبحت فيه الحسابات تطابق الأرصاد الفلكية إلى درجة كبيرة، وقد ظلت هذه القوانين سائدة منذ القرن السابع عشر حتى ظهور النظرية النسبية التي صاغها أينشتاين Einstein خلال السنوات ١٩٠٥ - ١٩١٦ وميكانيكا الكم التي اشترك في صياغتها ماكس بلانك Max plank وهينزبرج Heyznberg وشرودنجر Schrodinger وديراك Dirac في بداية القرن العشرين.

كما ابتكر الدكتور أحمد زويل Dr. Ahmed Zewail نظام تصوير سريعاً للغاية، يعمل باستخدام الليزر، له القدرة على رصد حركة الجزيئات عند نشوئها وعند التحام بعضها ببعض، وقد سجل أحمد زويل في قائمة الشرف بالولايات المتحدة الأمريكية والتي تضم ألبرت أينشتاين وألكسندر جراهام بيل. ولمزيد من المعلومات ابحث في الموسوعة الحرة (ويكيديا) على الموقع: <http://ar.wikipedia.org>

Measuring Units

وحدات القياس:

عندما يتقدم أحد الطلاب إلى الكليات العسكرية فإنه يقوم بإجراء بعض الفحوصات الطبية مثل قياس الطول، والوزن، وضغط الدم، ومعدل ضربات القلب، ... فعملية القياس هي مقارنة مقدار بمقدار آخر من نفس النوع، وذلك لمعرفة عدد مرات احتواء المقدار الأول إلى المقدار الثاني، والنظام المستخدم في معظم أنحاء العالم هو

النظام الدولي للوحدات. International system of units (SI)

ويتضمن هذا النظام الدولي للوحدات (SI) سبع وحدات أساسية، وقد حُدِّدت وحدات هذه الكميات الأساسية باستخدام القياس المباشر معتمدة على وحدات معيارية لكل من الطول والزمن والكتلة المحفوظة بدائرة الأوزان والمقاييس بفرنسا، أما الوحدات الأخرى فيمكن اشتقاقها من الوحدات الأساسية، وسنختص في دراستنا بالكميات الآتية:

Fundamental quantities

أولاً: الكميات الأساسية ووحدات قياسها في نظام (SI)

الرمز	الوحدة الأساسية	الكمية الأساسية
(m)	meter	length
(kg)	kilogram	mass
(s)	second	time

ومن مميزات استخدام وحدات النظام الدولي هو سهولة التحويل بين الوحدات

أضف إلى معلوماتك

١- الفيمتو ثانية Femtosecond

الفيمتو ثانية: هو جزء من مليون مليار جزء من الثانية، أي (عشرة مرفوعة للقوة (-١٥)) من الثانية والنسبة بين الثانية والفيمتو ثانية هي النسبة بين الثانية و ٣٢ مليون سنة.

في عام ١٩٩٠م تمكن العالم المصري أحمد زويل من تثبيت اختراعه المعروف بكيمااء الفيمتو، وذلك بعد جهد مضن مع فريق بحثه القابع في معهد كاليفورنيا للتقنية امتد منذ عام ١٩٧٩، ويتلخص اختراعه في اختراع وحدة زمنية تخطت حاجز الزمن العادي إلى وحدة زمن الفيمتو ثانية، وتوصل هذا العالم إلى اكتشافه العلمي باستخدام نبضات ليزر قصيرة المدى وشعاع جزيئي داخل أمبوب مفرغ، وكاميرا رقمية ذات مواصفات فريدة، وذلك لتصوير حركة الجزيئات منذ ولادتها وقبل التحاقها بباقي الجزيئات الأخرى، وأصبح بالإمكان التدخل السريع ومباغته التفاعلات الكيميائية عند حدوثها باستخدام نبضات الليزر كتليسكوب للمشاهدة، ومتابعة عمليات الهدم والبناء في الخلية، وقد جعل هذا العالم العربي العملاق الباب مفتوحاً لاستخدام هذا الاكتشاف العلمي في مجال الطب، والفيزياء، وأبحاث الفضاء وغيرها الكثير، وسُجِّلَت باسمه مدرسة علمية جديدة عُرفت باسم كيمااء الفيمتو.

كسور الوحدات

٢- مضاعفات الوحدات

القياس	الرمز	الوحدة
١٠-١	d	deci
١٠-٢	c	centi
١٠-٣	m	milli
١٠-٦	u	micro
١٠-٩	n	nano
١٠-١٢	p	pico
١٠-١٥	f	femto

القياس	الرمز	الوحدة
١٠ ^{١٢}	T	tera
١٠ ^٩	G	giga
١٠ ^٦	M	mega
١٠ ^٣	K	kilo

الوحدة الأولى:

وعلى ذلك يمكن تحويل كل من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

١ ٢,٧٥ كم إلى م.

٢ ٦٣٥ مم إلى ديسم.

٣ ٧٥٠ كيلو هرتز إلى ميغا هرتز.

٤ ١٩٧٠ جم إلى كجم.

على النحو التالي:

١ ٢,٧٥ كم = $٢,٧٥ \times ١٠٠٠ = ٢٧٥٠$ م

٢ ٦٣٥ مم = $٦٣٥ \times ١٠^{-٢} = ٦,٣٥$ ديسم

٣ ٧٥٠ كيلو هرتز = $٧٥٠ \times ١٠^{-٣} = ٠,٧٥$ ميغا هرتز

٤ ١٩٧٠ جم = $١٩٧٠ \times ١٠^{-٣} = ١,٩٧$ كيلو جرام.

تذكر أن

كم = ١٠٠٠ م

م = ١٠ ديسم

ديسم = ١٠ سم

سم = ١٠ مم

ثانيًا: الكميات المشتقة Derived quantities

١ وحدة قياس السرعة

تعرف السرعة بأنها معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن.

وحدة قياس السرعة = وحدة قياس المسافة ÷ وحدة قياس الزمن

فإن السرعة تقاس بوحدة: متر / ثانية (م/ث).

٢ العجلة

تعرف العجلة بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن ويكون:

وحدة قياس العجلة : مترًا / ثانية مربعة (م/ث^٢).

وعلى ذلك يمكن تحويل كل من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

١ ١ كم/س إلى م/ث.

٢ ١ كم/س إلى سم/ث.

٣ ١ كم/س إلى م/ث^٢

٤ ١ كم/س إلى سم/ث^٢

على النحو التالي:

١ ١ كم/س = $\frac{١٠٠٠ \times ١}{٦٠ \times ٦٠} = \frac{٥}{١٨}$ م/ث

هل تعلم

الثانية العيارية: هي الفترة الزمنية التي تستغرقها ذرة السيزيوم لتذبذب بمقدار دورة كاملة.

لاحظ أن

وحدات قياس الكميات المتجهة (السرعة، العجلة، القوة) تعامل من حيث مقاديرها فقط بصرف النظر عن الاتجاه.

تذكر أن

اليوم الشمسي المتوسط =

٢٤ ساعة .

الساعة = ٦٠ دقيقة.

الدقيقة = ٦٠ ثانية.

$$٢ \text{ ١ كم/س} = \frac{٣١٠٠ \times ١٠٠٠ \times ١}{٦٠ \times ٦٠} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث}$$

$$٣ \text{ كم/س/ث} = \frac{٢١٠٠}{٦٠ \times ٦٠ \times ٦٠} = \frac{٥}{١٨} \text{ م/ث}^٢$$

$$٤ \text{ كم/س/ث} = \frac{٣١٠٠ \times ١٠٠٠}{٦٠ \times ٦٠ \times ٦٠} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث}^٢$$

تدريب



١ حول كلاً من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

- أ ٧٢ كم/س إلى م/ث ب ١٠٠٠ سم/ث إلى كم/س ج ٣٦ كم/س/ث إلى سم/ث^٢

٣ القوة Force

تعرف القوة بأنها حاصل ضرب الكتلة (ك) في عجلة الحركة (ج).
فإذا رمزنا للقوة بالرمز (ق) فإن ق = ك × ج.

وحدات قياس مقدار القوة

الوحدات المطلقة: مثل الداين والنيوتن حيث ١ نيوتن = ١٠ داين ويعرف النيوتن والداين على النحو التالي:

النيوتن: هو مقدار القوة التي إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١ متر/ث^٢

الداين: هو مقدار القوة التي إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١ سم/ث^٢

الوحدات الثقالية:

مثل: ثقل الجرام (ث جم)، ثقل الكيلو جرام (ث كجم) حيث ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم

ويعرف ثقل الكيلو جرام وثقل الجرام على النحو التالي:

ثقل الكيلو جرام: هو مقدار القوة التي إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدار ٩,٨ متر/ث^٢

ثقل الجرام: هو مقدار القوة التي إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ٩٨٠ سم/ث^٢

وتربط الوحدات الثقالية بالوحدات المطلقة بالعلاقة: ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن،
١ ث جم = ٩٨٠ داين

أضف إلى معلوماتك

جميع الأجسام (بغض النظر عن كتلتها) تسقط على سطح الأرض بتسارع (عجلة) منتظم يقع بين ٩,٧٨، ٩,٨٢ م/ث^٢ اعتماداً على دائرة العرض ولكننا سنعتبرها ٩,٨ م/ث^٢ لسهولة الاستخدام ما لم تُحدد قيم أخرى لها.

الوحدة الأولى:

وعلى ذلك يمكن تحويل كل من الوحدات الآتية إلى الوحدات المناظرة لها:

١) $٣,١٤$ نيوتن إلى داين

٢) $٦,٧٥ \times ١٠^٧$ داين إلى نيوتن

على النحو التالي:

١) $٣,١٤$ نيوتن $= ٣,١٤ \times ١٠^٩ = ٣١٤٠٠٠$ داين

٢) $٦,٧٥ \times ١٠^٧$ داين $= ٦,٧٥ \times ١٠^٧ \div ١٠^٩ = ٦٧٥$ نيوتن

تدريب



٢) حول كلاً من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

أ) $\frac{١}{٧}$ ث جم إلى داين

ب) $٥,٣٦ \times ١٢٥٠$ داين إلى نيوتن

ج) $٢,٥٠$ نيوتن إلى داين

يمكن وضع الكميات المشتقة في جدول على النحو التالي:

وحدة القياس	علاقتها بالكميات الأخرى	الكمية المشتقة
m/s م/ث	المسافة ÷ الزمن	السرعة (ع) (V)
m/s ² م/ث ²	السرعة ÷ الزمن	العجلة (ج) (a)
N نيوتن	الكتلة × العجلة	القوة (ق) (F)

تحقق من فهمك

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ تقاس الكتلة بوحدة: أ الداين ب النيوتن ج الكيلو جرام د ثقل الكيلو جرام
- ٢ من الكميات الأساسية في النظام الدولي: أ الكتلة ب السرعة ج العجلة د القوة
- ٣ المليمتر وحدة تعادل: أ ١٠^{-٣} متر ب ١٠^{-٣} متر مكعب ج ١٠^{-٢} سنتيمتر د ١٠^{-٤} ديسيمتر

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٤ ماذا يطلق على القيم التالية: أ ١٠^{-٢} متر ب ١٠^{-٣} متر ج ١٠٠٠ متر
- ٥ حول كلاً مما يأتي إلى متر: أ ٦٣,٤ سنتيمتر ب ٥١٢,٦ مليمتر ج ٠,٥٣٤ ديسيمتر
- ٦ **تفكير ناقد:** احسب بوحدة الكيلوجرام كتلة الماء اللازمة لملء وعاء على شكل متوازي مستطيلات طوله ١,٦ م وعرضه ٠,٦٥ م وارتفاعه ٣٦ سنتيمتر، علماً بأن كثافة الماء تساوي ١ جم/سم^٣ مقرباً الناتج لأقرب عدد صحيح.

[إرشاد: الكتلة = الحجم × الكثافة]

الاستاتيكا

Statics

مقدمة الوحدة

يختص علم الإستاتيكا بحل جميع المشاكل الهندسية المتعلقة بدراسة توازن الأجسام المادية، وعمليات تحليل وتحصيل القوى المؤثرة عليها، والتأثير المتبادل الناشئ عنها، وتطبيقاته المختلفة في بناء المنازل والمباني والجسور وتصميم الآلات والمحركات. وقد كان لنيوتن أبحاث ومؤلفات في هذا المجال منها كتاب المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية الذي يتكون من ثلاثة أجزاء، ويعتبر أساس علم الميكانيكا الكلاسيكي. ومن أقوال نيوتن المشهورة عن نفسه «لست أعلم كيف أبدو للعالم، ولكنني أبدو لنفسى، وكأني صبي يلعب على شاطئ البحر، ألهو بين الحين والحين بالعثور على حصة ملساء أو صدفه أجمل من العادة، بينما ينسبط محيط الحقيقة العظيم مغلق الأسرار أمامي».

مخرجات التعلم

في نهاية الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف مفهوم القوة، والقوة كمتجه، ووحدات قياس مقدار القوة في ضوء وحدات القياس السابقة.
- ✚ يوجد محصلة قوتين مقدارًا واتجاهًا (القوتان تؤثران في نفس النقطة).
- ✚ يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين في اتجاهين معلومين.
- ✚ يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين متعامدتين.
- ✚ يوجد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة.
- ✚ يبحث اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة في الحالات الآتية:
 - ✚ إذا اتزنت قوتان مستويتان متلاقيتان في نقطة.
 - ✚ إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة.
 - ✚ إذا اتزنت عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة.
- ✚ يوجد محصلة قوتين هندسيًا وجبريًا مستخدمًا تكنولوجيا المعلومات في صورة أنشطة.
- ✚ يتعرف تطبيقات ما درسه في الإستاتيكا في مواقف فيزيائية وحياتية.

المصطلحات الأساسية

Resolving force	تحليل قوة	Statics	استاتيكا
force Component	مركبة قوة	Force	قوة
equilibrium of a body	اتزان جسم	Rigid body	جسم جاسئ
triangle of forces	قاعدة مثلث القوى	Gravitation force	قوة الثقاقل
lami's rule	قاعدة لامي	acceleration of gravity	عجلة السقوط الحر
Equilibrium of rigid body	اتزان جسم جاسئ	Newton	نيوتن
smooth plane	مستوى أملس	Dyne	داين
inclined smooth plane	مستوى مائل أملس	Kilogram weight	ثقل كيلو جرام
centre of gravity	مركز ثقل	Gram weight	ثقل جرام
		Line of action of the force	خط عمل قوة

الأدوات والوسائل

- Scientific calculator آلة حاسبة علمية
- Graphical computer programs برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

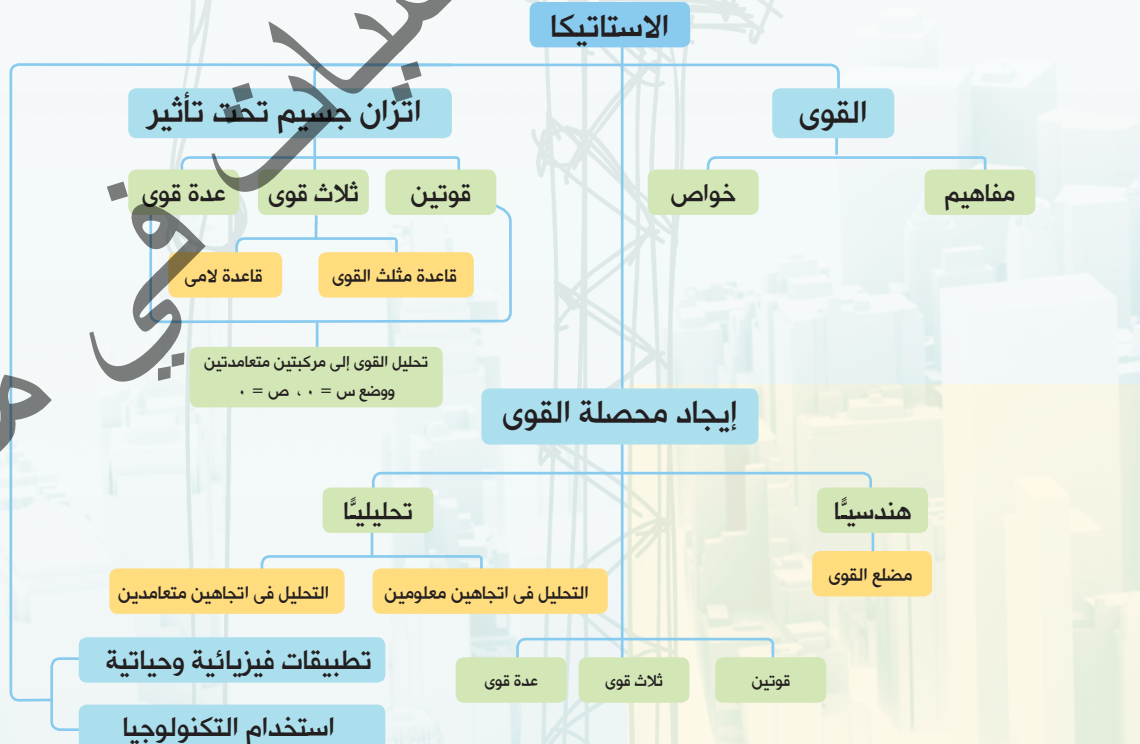
الدرس (١ - ١): القوى.

الدرس (١ - ٢): تحليل قوة إلى مركبتين.

الدرس (١ - ٣): محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة

الدرس (١ - ٤): اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة.

مخطط تنظيمي للوحدة



القوى

Forces



سوف نتعلم

- بعض المفاهيم الأساسية في الإستاتيكا.
- خواص القوة.
- محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة.
- إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة تحليلياً.

المصطلحات الأساسية

- قوة Force
- محصلة Resultant
- جسم جاسئ Rigid body
- قوة التثاقل Gravitation force
- عجلة السقوط الحر Acceleration of gravity
- نيوتن Newton
- داين Dyne
- ثقل كيلو جرام Kilogram weight
- ثقل جرام Gram weight

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs

تمهيد:

علّمت أنّ الإستاتيكا هي فرع الميكانيكا الذي يدرس القوى وشروط اتزان الأجسام المادية التي تؤثر عليها القوى ، وستكون دراستنا في هذه الوحدة على اتزان الأجسام الجاسئة (١) فقط. ومن دراستك في المتجهات علمت الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

القوة: Force

تتوقف حالة اتزان أو حركة الجسم على طبيعة التأثير الميكانيكي المتبادل بينه وبين الأجسام الأخرى، أي على حالات الضغط أو الشد أو التجاذب أو التنافر التي تحدث للجسم نتيجة لهذا التأثير.

تعرف القوة بأنها تأثير أحد الأجسام على جسم آخر.

خواص القوة:

يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:
أولاً: مقدار القوة.

يتعين مقدار القوة بمقارنتها بوحدة القوى وقد سبق لك دراسة الوحدة الأساسية لقياس القوة في الميكانيكا وهي النيوتن (N) أو ثقل الكيلوجرام (kg.wt) حيث:

١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم ، ١ نيوتن = ١٠ داين

١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

(مالم يذكر خلاف ذلك) (٢)

١- الجسم الجاسئ هو الجسم الذي يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية.

٢- قوة التثاقل (أو الوزن) هي مقدار جذب الأرض للجسم ، حيث إن الأرض تجذب الأجسام الساقطة نحوها، وتختلف قيمة عجلة السقوط الحر للأجسام من مكان لآخر على سطح الأرض والقيمة التقريبية لها تساوي ٩,٨ م/ث^٢ مالم يذكر خلاف ذلك، وسيعرض هذا الموضوع بالتفصيل في مواضع أخرى في الميكانيكا.

تذكر أن

الكمية القياسية Scalar
تتحدد تحديداً تماماً بقيمتها العددية مثل المسافة ، الكتلة ، الزمن ، المساحة ، الحجم...
الكمية المتجهة Vector
وتتحدد باتجاهها بالإضافة إلى قيمتها العددية مثل القوة والإزاحة والسرعة ، والوزن... إلخ.

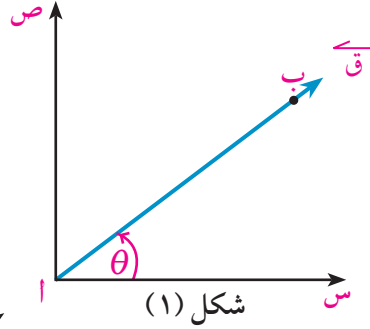
أضف إلى معلوماتك

تنقسم الأجسام الطبيعية إلى:
- أجسام جاسئة لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها.
- أجسام قابلة للتشكيل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل السوائل والغازات والمطاط والصلصال... إلخ



أضف إلى معلوماتك

الزاوية القطبية polar angle
هى الزاوية الموجبة التى
يصنعها المتجه مع الاتجاه
الموجب لمحور السينات.

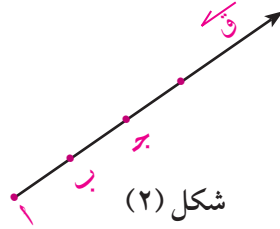


شكل (١)

ثانياً: اتجاه القوة

يُمثل شكل (١) المجاور متجه القوة $\vec{C}$ ويمكن تمثيله بالقطعة المستقيمة الموجهة $\vec{AB}$ حيث أ نقطة البداية، ب نقطة النهاية للقطعة المستقيمة الموجهة، ويُعبر عن مقدار القوة بمعيار المتجه $||\vec{AB}||$ (طوله) (بمقياس رسم مناسب) وينظر اتجاه السهم اتجاه القوة $\vec{C}$ ، وتسمى زاوية θ بالزاوية القطبية للمتجه فى مستوى القوة $\vec{C}$ وتُكتب على الصورة القطبية كالآتى (ق، θ).

ثالثاً: نقطة تأثير القوة وخط عملها

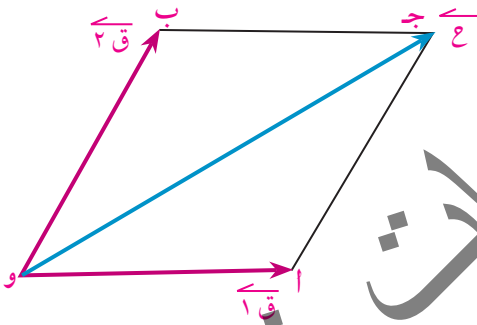


شكل (٢)

فى شكل (١): تنطبق نقطة أ عادة على نقطة تأثير القوة $\vec{C}$ ، ويمكن نقل نقطة تأثير القوة $\vec{C}$ إلى أى نقطة أخرى، بحيث تقع على خط عمل $\vec{C}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم كما فى شكل (٢) خط عمل القوة يسمى $\vec{AB}$ فى شكل (١) بخط عمل القوة $\vec{C}$ أى أن خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة:

لكل قوتين مؤثرتين على جسم فى نقطة واحدة، قوة محصلة تؤثر فى نفس النقطة، تقوم بنفس التأثير الذى تقوم به القوتان وتمثل هندسياً بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

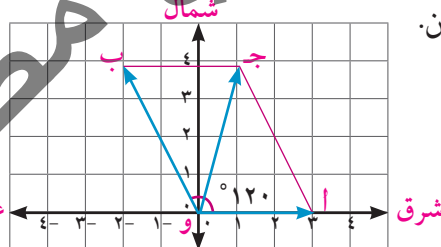


ففى الشكل المقابل نجد أن: $\vec{C}$ الممثل لقطر متوازى الأضلاع $\vec{C_1}$ و $\vec{C_2}$ يُمثل محصلة القوتين $\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ أى أن: $\vec{C} = \vec{C_1} + \vec{C_2}$



استخدام برنامج (GeoGebra)

$\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ قوتان تؤثران فى نقطة من جسم جاسئ، حيث $\vec{C_1} = 300$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق، $\vec{C_2} = 400$ نيوتن وتعمل فى اتجاه 60° شمال الغرب. أوجد محصلة القوتين.



✎ اختر مقياس رسم مناسباً (ليكن ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن).

✎ ارسم $\vec{OA}$ تمثل القوة $\vec{C_1}$ حيث $||\vec{OA}|| = 3$ سم فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.

✎ ارسم $\vec{OB}$ القطبية حيث $\angle AOB = 120^\circ$

✎ ثم ارسم $\vec{OB'}$ تمثل القوة $\vec{C_2}$ حيث $||\vec{OB'}|| = 4$ سم.

✎ أكمل رسم متوازى الأضلاع وأجب.

- لاحظ أن محصلة القوتين $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\vec{Q}$.
- حدد باستخدام البرنامج $||\vec{Q}|| \approx 3,6$ سم. أي أن $3,6 \approx 100 \times 360 = 360$ نيوتن.
- لاحظ أن $\vec{Q}$ يصنع مع $\vec{Q}_1$ زاوية قياسها $53^\circ 53' 73''$.
- أي أن محصلة القوتين $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ مقدارها 360 نيوتن تقريباً وتصنع مع $\vec{Q}_1$ زاوية قياسها $53^\circ 53' 73''$.

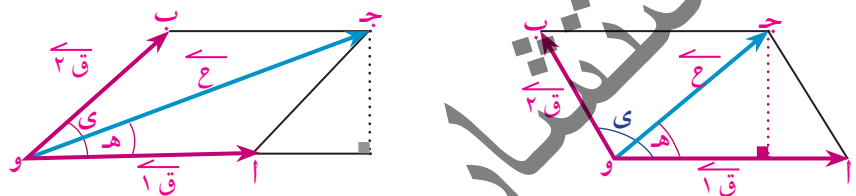
تطبيق على النشاط

1) استخدم برنامج (GeoGebra) في إيجاد محصلة القوتين $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ اللتين تؤثران في نقطة مادية حيث $Q_1 = 400$ نيوتن وتعمل في اتجاه الشرق ، $Q_2 = 500$ نيوتن وتعمل في اتجاه 80° شمال الشرق.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة تحليلياً: The resultant of two force meeting at a point analytically

تذكر أن

قاعدة جيب التمام:
في المثلث أ ب ج يكون:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$


نفرض أن $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ قوتان متلاقيتان في نقطة (و) وأن قياس الزاوية بين اتجاهيهما القوتين (ي) فإذا كان $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ تمثلان $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ فإن $\vec{Q}$ تمثل المحصلة $\vec{Q}$ وبفرض أن هـ هو قياس الزاوية التي تصنعها $\vec{Q}$ مع $\vec{Q}_1$ فإنه كما سبق في دراسة قاعدة جيب التمام يمكن إيجاد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ من العلاقات:

$$Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \cos \alpha} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{Q_1^2 + Q_2^2 - Q^2}{2Q_1Q_2}$$

حيث: Q_1 ، Q_2 ، Q مقادير القوى $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ، $\vec{Q}$ على الترتيب
فكر: كيف يمكن الاستدلال على صحة العلاقات السابقة.

مثال

٧) قوتان مقدارهما 3 ، $3\sqrt{3}$ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما 45° . أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها مع القوة الأولى.

الحل

بوضع: $Q_1 = 3$ ، $Q_2 = 3\sqrt{3}$ ، $\alpha = 45^\circ$ ،

$$Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \cos \alpha}$$

$$Q = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2 + 2 \times 3 \times 3\sqrt{3} \times \cos 45^\circ}$$

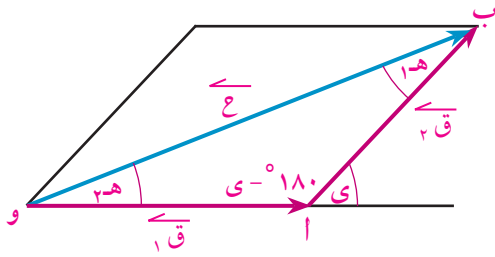
$$Q = \sqrt{9 + 27 + 18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{Q_1^2 + Q_2^2 - Q^2}{2Q_1Q_2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3^2 + (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{6})^2}{2 \times 3 \times 3\sqrt{3}} = \frac{9 + 27 - 54}{18\sqrt{3}} = \frac{-18}{18\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha = \frac{Q_1^2 + Q_2^2 - Q^2}{2Q_1Q_2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3^2 + (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{6})^2}{2 \times 3 \times 3\sqrt{3}} = \frac{9 + 27 - 54}{18\sqrt{3}} = \frac{-18}{18\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة فإن: $(\angle هـ) = 54^\circ 33' 26''$

حل آخر للجزء الثاني من المثال :



لاحظ أن: في الشكل المقابل المثلث و أ ب يمثل القوتين $\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ حيث $\angle هـ$ هي زاوية ميل خط عمل $\vec{C_2}$ مع المحصلة $\vec{C}$ ، $\angle هـ$ هي زاوية ميل خط عمل $\vec{C_1}$ مع المحصلة $\vec{C}$ باستخدام قاعدة جيب الزاوية.

لاحظ أن: جا $(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$

فإن: $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{C_2}{C}$ حيث $\gamma = 180^\circ - \alpha$

وتستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة على أي من $\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$

ففي المثال السابق: لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة مع $\vec{C_1}$ نستخدم العلاقة: $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{C_2}{C}$

$$\therefore \frac{\sin 3}{\sin 45} = \frac{2}{C} \Rightarrow C = \frac{2 \times \sin 45}{\sin 3} = 2.89 \text{ جا هـ}$$

ومنها فإن قياس زاوية ميل المحصلة مع $\vec{C_1}$ تساوي $54^\circ 33' 26''$ وهو نفس الجواب السابق.

ملاحظة: يمكن استخدام هذه الطريقة في حل التمارين.

٩ حاول أن تحل

٢ قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران في نقطة مادية، وقياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوي 60° . أوجد مقدار محصلتهما، وزاوية ميلها على القوة الأولى.

تفكير ناقد: أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ في الحالات الآتية:

١- إذا كانت القوتان متعامدتين. ٢- إذا كانت القوتان متساويتين في المقدار.

مثال

٨ أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ في كل حالة من الحالات الآتية:

أ $C_1 = 5$ نيوتن ، $C_2 = 12$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 90°

ب $C_1 = 16$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 120°

الحل

أ $\therefore \vec{C_1}$ ، $\vec{C_2}$ متعامدتان أي $(\angle ي) = 90^\circ$ فتكون جا $\gamma = 1$ ، جتا $\gamma = 0$

$\therefore C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{16 + 144} = 15$ نيوتن ، لذلك فإن: $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

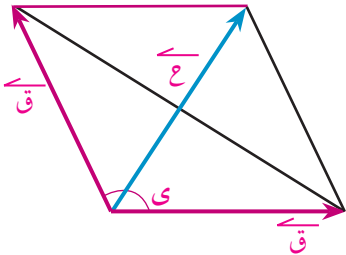
لاحظ أن

إذا كانت $\vec{C_1} \perp \vec{C_2}$ فإن $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ،
ظاهـ $\frac{C_2}{C_1}$

ويكون اتجاه المحصلة مع $\vec{Q}_1$ هو: $\frac{Q_2}{Q_1}$ **أي أن:** ظاهر = $\frac{12}{5}$

∴ قياس زاوية ميل المحصلة مع $\vec{Q}_1$ هي $67^\circ 22' 49''$

وبالتعويض عن $Q_1 = Q_2 = 16$



$$\therefore R = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2(Q_1)(Q_2)\cos(120^\circ)} = \sqrt{16^2 + 16^2 + 2(16)(16)\cos(120^\circ)} = 16 \text{ نيوتن}$$

ونلاحظ من الشكل المرسوم أن: $Q_1 = Q_2 = R = 16$ نيوتن، وأن

المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين المتساويتين، أي أن قياس

زاوية ميل المحصلة على أي من القوتين = 60°

لاحظ أن: من هندسة الشكل:

$$\therefore \sin \frac{Y}{2} = \frac{R}{2Q_1} \quad \therefore Y = 60^\circ \text{ جتا } \frac{Y}{2}$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ في كل حالة من الحالات الآتية:

أ $Q_1 = 5$ ، $Q_2 = 4$ نيوتن ، $Q_1 = Q_2 = 6$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 90°

ب $Q_1 = Q_2 = 12$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 60°

حالات خاصة:

١- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفي نفس الاتجاه:

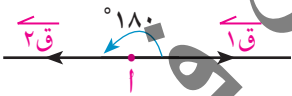


في هذه الحالة فإن $R = (Q_1 + Q_2)$ ويكون جتا 1 وبالتعويض في

قانون إيجاد المحصلة نجد أن: $R = Q_1 + Q_2$ ويكون اتجاه المحصلة في

نفس اتجاه القوتين ، وتسمى R في هذه الحالة بالقيمة العظمى للمحصلة.

٢- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل، وفي اتجاهين متضادين:



في هذه الحالة فإن $R = (Q_1 - Q_2)$ ويكون جتا -1 وبالتعويض في قانون

إيجاد المحصلة نجد أن: $R = |Q_1 - Q_2|$ ويكون اتجاه المحصلة يعمل في اتجاه

القوة الأكبر مقداراً ، وتسمى R في هذه الحالة بالقيمة الصغرى للمحصلة.

مثال: أوجد القيمتين العظمى والصغرى لمحصلة القوتين 4 ، 7 نيوتن.

القيمة العظمى $= 4 + 7 = 11$ نيوتن وتعمل في اتجاه القوتين.

القيمة الصغرى $= |7 - 4| = 3$ نيوتن وتعمل في اتجاه القوة 7 نيوتن.

مثال

٩ قوتان مقدارهما 4 ، 4 نيوتن تؤثران في نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما 120° فإذا كان مقدار محصلتهما

يساوي $4\sqrt{3}$ نيوتن فأوجد: مقدار $\vec{Q}$ وقياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع $\vec{Q}$.

الحل

بالتعويض عن: $ق_1 = ق_2 = ق$ ، $ق_3 = ٤$ ، $ح = ٣\sqrt{٤}$ ، $ي = ١٢٠^\circ$
 فى القانون: $ح = ق_1 + ق_2 + ق_3 = ٢ق + ق_1 + ق_2$ جتاى
 $\therefore (٣\sqrt{٤}) = ٢(٤) + ٢ \times ٢ \times ٤ \times ٤$ جتا ١٢٠° أى أن: $٤٨ = ٢ق + ١٦ - ٤ق$
 $\therefore ٢ق - ٤ق = ٣٢ - ٠$ أى أن: $(ق + ٤) (ق - ٨) = ٠$ ومنها $ق = ٨$ نيوتن، $ق = -٤$ مرفوض
 لإيجاد قياس الزاوية بين $ق$ ، $ح$ نستخدم القانون: $\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 ق_2} = \frac{١}{٣\sqrt{٤}}$ ظاهر
 $\therefore \frac{١}{٣\sqrt{٤}} = \frac{١٢٠ \times ٤}{١٢٠ \times ٤ + ٨}$ ظاهر

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $ق_1 = ٣٠^\circ$

حل آخر للجزء الثاني:

لإيجاد قياس الزاوية بين $ق$ ، $ح$ نستخدم قانون الجيب: $\frac{ح}{ق_1} = \frac{ق_2}{ق_3}$
 $\therefore \frac{٣\sqrt{٤}}{١٢٠} = \frac{٤}{١٢٠}$
 بالاختصار والتبسيط $\frac{١}{٣} = \frac{٤}{١٢٠}$

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $ق$ تساوى ٣٠°

٩ حاول أن تحل

٤ قوتان مقدارهما ٦ ، $ق$ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° . أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التى مقدارها $ق$.

تعبير شفهي: أوجد محصلة قوتين متساويتين فى المقدار، ولهما نفس خط العمل ويعملان فى اتجاهين متضادين.

تمارين (١ - ١)

أكمل ما يأتى:

- ١ يتحدد تأثير قوة على جسم بالآتى
- ٢ متجه محصلة القوتين $ق_1$ ، $ق_2$ يساوى
- ٣ القيمة العظمى لمحصلة قوتين مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى
- ٤ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى
- ٥ ٢ ، ٣ نيوتن قوتان فإذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦ مقدار محصلة القوتين ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° تساوى.

- أ ٢ نيوتن ب ٦ نيوتن ج ٧ نيوتن د ٨ نيوتن

٧ قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ومقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى
 أ ٣٠ ب ٤٥ ج ٦٠ د ٩٠

٨ قوتان متساويتان متلاقيتان في نقطة، مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى:
 أ ٣٠ ب ٦٠ ج ١٢٠ د ١٥٠

٩ قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى:
 أ ١,٥ ب ٣ ج $3\sqrt{3}$ د ٦

١٠ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدين فإن جيب زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى تساوى:
 أ $\frac{2}{5}$ ب $\frac{4}{5}$ ج $\frac{3}{4}$ د $\frac{4}{3}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

١١ قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° . أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة الأولى.

١٢ قوتان مقدارهما ٣ ، $3\sqrt{3}$ ث. كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

١٣ قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث. كجم تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث. كجم. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

١٤ قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما ق $3\sqrt{7}$ نيوتن فأوجد مقدار ق.

١٥ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاها محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على ق. أوجد مقدار ق.

١٦ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد مقدار ق.

١٧ قوتان مقدارهما ق ، ق $3\sqrt{7}$ نيوتن تؤثران في نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٢ ق نيوتن. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

١٨ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما يساوى $\frac{4}{5}$ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

١٩ قوتان متساويتان مقدار كل منهما ق ث. كجم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان

وأصبح قياس الزاوية بينهما 60° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث. كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق.

٢٠ قوتان مقدارهما ١٢ ، ق ث. كجم تؤثران في نقطة ، تعمل الأولى في اتجاه الشرق ، وتعمل الثانية في اتجاه 60° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا عُلِمَ أنَّ خط عمل المحصلة يؤثر في اتجاه 30° جنوب الشرق.

٢١ ق ١ ، ق ٢ قوتان تؤثران في نقطة مادية ، وتحصران بينهما زاوية قياسها 120° ومقدار محصلتهما $19\sqrt{2}$ نيوتن. وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما 60° فإن مقدار المحصلة يساوى ٧ نيوتن. أوجد قيمة كل من ق ١ ، ق ٢.

٢٢ قوتان مقدارهما ق ، ق ٢ ث. كجم تؤثران في نقطة ما ، إذا ضُوعِفَ مقدار الثانية وزيد مقدار الأولى ١٥ ث. كجم لا يتغير اتجاه محصلتها. أوجد مقدار ق.

تفكير إبداعي:

٢٣ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث. كجم. وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث. كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.

٢٤ قوتان مقدارهما ك ، ق ومقدار محصلتهما $2\sqrt{2}$ إذا كان قياس الزاوية بينهما هـ ، وإذا تغير قياس الزاوية وأصبحت $(180^\circ - هـ)$ فإن مقدار محصلتهما ينقص إلى النصف. أوجد النسبة بين ك ، ق.

٢٥ ق ٢ ، ق قوتان تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠ ومقدار محصلتهما يساوى $5\sqrt{2}$ ق (١ + م) وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما $(90^\circ - ي)$ فإن مقدار المحصلة يساوى $5\sqrt{2}$ ق (م - ١).

$$\text{أثبت أن ظا ي} = \frac{2-2}{2+2}$$



١ ، ٢ قوتان متلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما ع نيوتن ، إذا عكس اتجاه ٢ فإن المحصلة تصبح ع $3\sqrt{2}$ نيوتن وفي اتجاه عمودى على المحصلة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين.

١- اعتبر أن قياس الزاوية بين القوتين ي وزاوية ميل المحصلة مع ١ قياسها هـ.

٢- أوجد ظا هـ ثم أوجد ظا $(90^\circ - هـ)$ عند عكس اتجاه ٢

٣- أثبت أن $١ = ٢ = ٣$ ق من الخطوة السابقة.

٤- أوجد باستخدام قانون مقدار المحصلة محصلة القوتين ١ ، ٢ قبل وبعد عكس اتجاه ٢.

٥- هل يمكنك استنتاج أن جتا ي = - $\frac{1}{2}$ لإيجاد قياس الزاوية بين القوتين؟ استنتج ذلك من العلاقات السابقة.

٦- هل لديك طرق أخرى للحل؟ اذكر إحدى هذه الطرق.

تحليل القوى

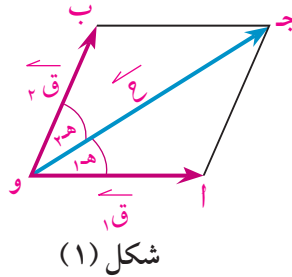
Forces resolution

تمهيد:

إنَّ تحليل قوة معلومة إلى عدَّة مركبات بوجه عام يعنى إيجاد مجموعة مؤلَّفة من عدَّة قوى ، تكون القوة المعلومة هى مُحصَلتها، وسنقتصر على دراسة تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.

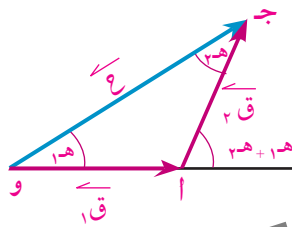
تحليل قوة فى اتجاهين معلومين

Resolution of a force into two components



شكل (١)

يبين شكل (١): متجه المحصلة $\vec{C}$ المراد تحليلها إلى مركبتين فى الاتجاهين $\vec{A}$ ، و $\vec{B}$ واللّتين تصنعان زاويتين قياسيهما α ، β على الترتيب مع $\vec{C}$ ولتكن المركبتان هما: $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$



شكل (٢)

يبين شكل (٢): مثلث القوى مع ملاحظة أن $\vec{A} = \vec{C}_1$ و $\vec{B} = \vec{C}_2$

(من خواص متوازي الأضلاع)

وبتطبيق قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{C}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{C_1}{\sin \beta} = \frac{C_2}{\sin \alpha}$$

$$C_1 = \frac{C \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad C_2 = \frac{C \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

مثال

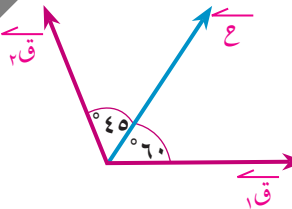
١ حلّ قوة مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين 60° ، 45° فى اتجاهين مختلفين منها مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل

بتطبيق قاعدة الجيب:

$$\frac{12}{\sin 105^\circ} = \frac{C_1}{\sin 60^\circ} = \frac{C_2}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore C_1 = \frac{12}{\sin 105^\circ} \times \sin 60^\circ \approx 10.7846 \text{ نيوتن}$$



سوف نتعلم

- تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.
- تحليل قوة فى اتجاهين متعامدين.

المصطلحات الأساسية

- مركبة قوة force Component
- مثلث قوى triangle of forces
- مركز ثقل centre of gravity

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

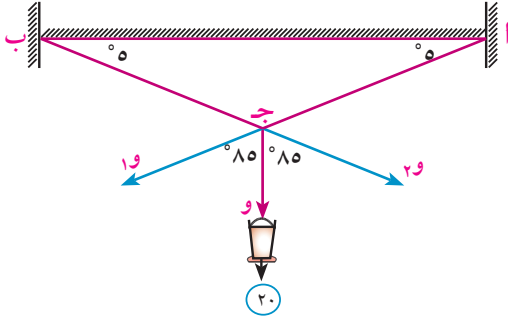
$$ق_٢ = ٦٠ جا ١٢ = ١٠,٧٥٨٩ نيوتن$$

٤ حاول أن تحل

١ حلل قوة مقدارها ٣٦ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزوايتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° في اتجاهين مختلفين منها.

مثال

تطبيقات حياتية



٢ مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين أ ج ، ب ج يميلان على الأفقي بزوايتين متساويتين قياس كل منهما ٨٥° .
حلل وزن المصباح في الاتجاهين أ ج ، ب ج مقرباً الناتج لأقرب نيوتن.

الحل

نُمثل قوة الوزن (٢٠ نيوتن) بمتجه يعمل رأسياً لأسفل نقطة بدايته هي النقطة ج .
نحلل متجه الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين كما يلي:

$$\frac{٢٠}{١٧٠ جا ٨٥} = \frac{ق_٢}{٨٥ جا ٨٥} = \frac{ق_١}{٨٥ جا ٨٥}$$

$$١ = ٢ = ١ \quad \text{ومن ذلك تكون:} \quad \frac{٨٥ جا ٨٥}{١٧٠ جا ٨٥} \times ٢٠ = ٢ = ١$$

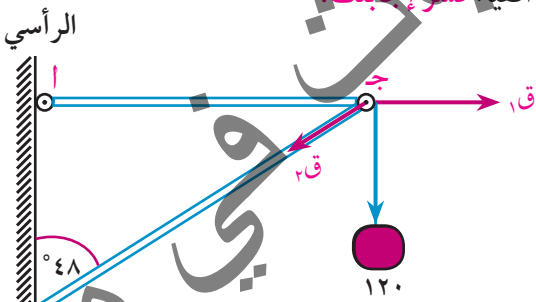
$$١ = ٢ = ١ \quad ١١٤,٧٣٧١٣ = ١١٥ نيوتن.$$

تفكير ناقد: ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٩٠° وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يصبح الحبل المعدني أفقياً؟ **فسّر إجابتك.**

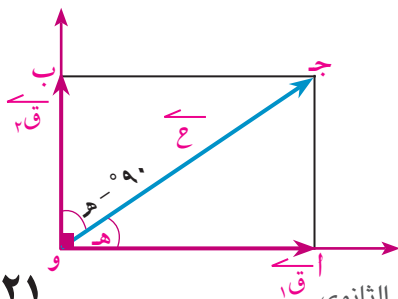
٤ حاول أن تحل

٢ الشكل المقابل:

حلل القوة الرأسية ١٢٠ ث. جم إلى مركبتين إحدهما في الاتجاه الأفقي، والأخرى في اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨° .



تحليل قوة في اتجاهين متعامدين Resolution of a force into two perpendicular components



إذا أثرت القوة ح في نقطة مادية (و) كما في الشكل المجاور، وكانت مركبتيهما المتعامدتين ق١ ، ق٢ حيث اتجاه ق١ يميل على اتجاه ح بزاوية قياسها هـ ، فإن متوازي الأضلاع يؤول في هذه الحالة إلى المستطيل أ ج ب و ، وب تطبيق قانون الجيب على المثلث أ ج ب فإن:

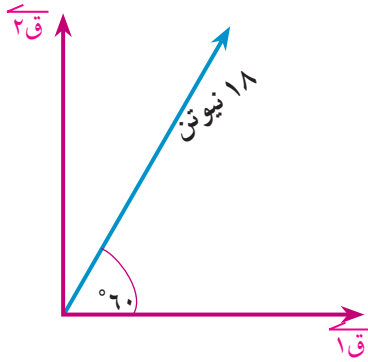
$$\left\langle \begin{aligned} \frac{ق_1}{جا\ ٩٠} = \frac{ق_2}{جاه} = \frac{ح}{ج\ ٩٠} \end{aligned} \right. \text{ أى أن: } \frac{ق_1}{جاه} = \frac{ق_2}{ج\ ٩٠} = \frac{ح}{ج\ ٩٠}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

ق_١ (مقدار المركبة فى اتجاه معلوم) = ع جتا هـ

ق_٢ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ع جا هـ

مثال



٣ حلل قوة مقدارها ١٨ نيوتن فى اتجاهين متعامدين، إحداهما يصنع مع القوة زاوية قياسها ٦٠

الحل

$$ق_1 = ١٨ \text{ جتا } ٦٠ = \frac{1}{2} \times ١٨ = ٩ \text{ نيوتن}$$

$$ق_2 = ١٨ \text{ جا } ٦٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times ١٨ = ٣\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

حاول أن تحل

٣ حلل قوة مقدارها ٣٦ نيوتن والتى تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

Inclined Plane

المستوى المائل

هو سطح يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث $\frac{\pi}{2} > هـ$ ، وخط أكبر ميل للمستوى هو الخط فى

المستوى المائل العمودى على خط تقاطع

هذا المستوى مع المستوى الأفقى والموضح

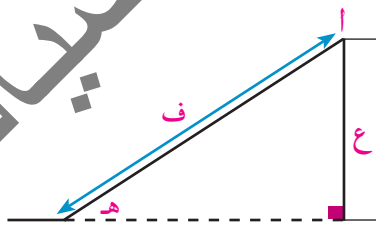
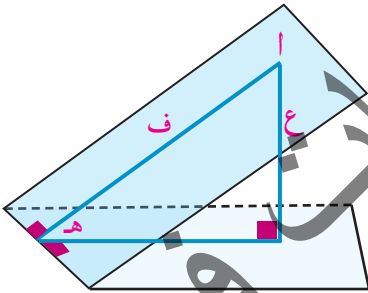
بالشكل باللون الأزرق ويكون

جا هـ = $\frac{ع}{ف}$ حيث:

ع تمثل بُعد النقطة أ عن المستوى الأفقى،

ف تمثل بُعد النقطة أ عن خط تقاطع

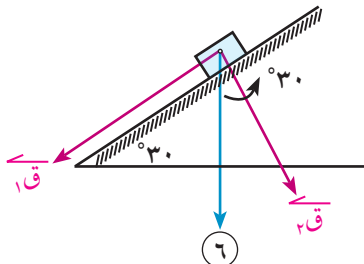
المستوى المائل مع المستوى الأفقى.



مثال

٤ وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الحل



الشكل المقابل يبين وزن الجسم ٦ نيوتن، ويؤثر رأسياً إلى أسفل، مركبة

وزن الجسم ق_١ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأسفل،

والمركبة الأخرى ق_٢ وتعمل فى الاتجاه العمودى للمستوى ولأسفل.

مركبة وزن الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى (ق_١).

حيث ق_١ = ٦ جا هـ

$$٦ جا هـ = ٣٠ = \frac{١}{٢} \times ٦ = ٣ \text{ نيوتن}$$

مركبة وزن الجسم في الاتجاه العمودي على المستوى (ق_٢)

حيث ق_٢ = ٦ جتا هـ

$$٦ جتا هـ = ٣٠ = \frac{٣}{٢} \times ٦ = ٣٦ \text{ نيوتن}$$

أضف إلى معلوماتك

مركز ثقل الجسم الجاسئ

هي النقطة التي يمر بها دائماً الخط الرأسى المار بنقطة التعليق عندما يعلق الجسم من أى نقطة عليه فعلى سبيل المثال.

(١) مركز ثقل جسم كروى منتظم ومتجانس هي النقطة التي يقع فيها المركز الهندسى لهذا الجسم.

(٢) مركز ثقل قضيب منتظم السمك والكثافة هو منتصف هذا القضيب.

تعبير شفهى: هل مقدار كل من مركبتى القوة ق أقل من مقدار القوة ق نفسها؟

فسر إجابتك.

حاول أن تحل

٤) جسم جاسئ مقدار وزنه ٣٦ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل والاتجاه العمودى عليه.



تمارين (١-٢)



أكمل ماأتى:

١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشرق تساوى نيوتن.

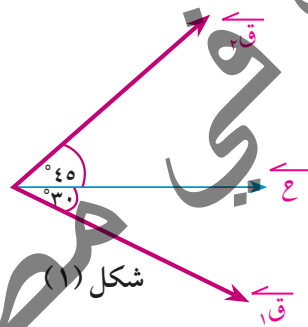
٢) قوة مقدارها ٣٦٤ نيوتن تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشمال الشرقى تساوى نيوتن.

٣) فى شكل (١):

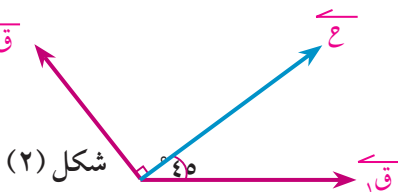
أ) إذا حُلَّت القوة ح إلى مركبتين ق_١ ، ق_٢ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان || ح || = ١٢ نيوتن ، فإن: ق_١ = ... نيوتن ، ق_٢ = ... نيوتن.

٤) فى شكل (٢):

أ) إذا حُلَّت القوة ح إلى مركبتين ق_١ ، ق_٢ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان || ح || = ١٨ نيوتن ، فإن: ق_١ = ... نيوتن ، ق_٢ = ... نيوتن

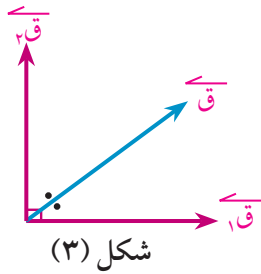


شكل (١)



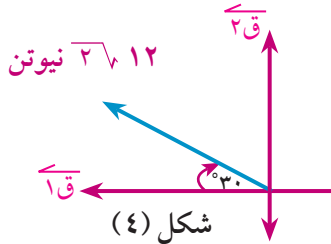
شكل (٢)

٥ في شكل (٣):



أ إذا حللت القوة $\vec{Q}$ إلى مركبتين متعامدتين $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ وكان متجه القوة $\vec{Q}$ ينصف الزاوية بين اتجاهي $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ وكان $||\vec{Q}|| = 2\sqrt{6}$ ث كجم فإن: $||\vec{Q}_1|| = \dots$ ث كجم ، $||\vec{Q}_2|| = \dots$ ث كجم.

٦ في شكل (٤):



أ قوة مقدارها $2\sqrt{12}$ نيوتن تعمل في اتجاه 30° شمال الغرب.
 مقدار مركبة القوة في اتجاه الغرب = ... نيوتن.
 مقدار مركبة القوة في اتجاه الشمال = ... نيوتن.

٧ قوة مقدارها 600 ث جم تؤثر في نقطة مادية. أوجد مركبتها في اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياسيهما 30° ، 45° .

٨ قوة مقدارها 120 نيوتن تعمل في اتجاه الشمال الشرقي. أوجد مركبتها في اتجاه الشرق واتجاه الشمال.

٩ حلل قوة أفقية مقدارها 160 ث جم في اتجاهين متعامدين، أحدهما يميل على الأفقي بزاوية قياسها 30° إلى أعلى.

١٠ قوة مقدارها 18 نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب. أوجد مركبتها في اتجاهي 60° شرق الجنوب، والأخرى في اتجاه 30° غرب الجنوب.

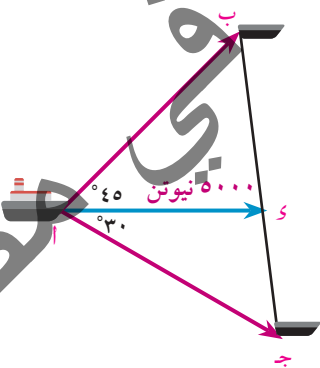
١١ جسم جاسئ وزنه 42 نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقي بزاوية قياسها 60° . أوجد مركبتي وزن هذا الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه.

تفكير إبداعي:

١٢ مستوى مائل طوله 130 سم وارتفاعه 50 سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه 390 ث جم. أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه.

الربط بالملاحظة البحرية:

١٣ يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، ج تتصلان بحبلين مثبتين في خُطاف في نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما 75° ، فإذا كان زاوية ميل أحد الحبلين على $\vec{A}$ يساوي 45° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوي 5000 نيوتن وتعمل في اتجاه $\vec{A}$. أوجد الشد في كل من الحبلين .





محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة

The resultant of coplanar forces meeting at a point

سوف نتعلم

- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة هندسية.
- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة تحليلياً.

فكر و ناقش



سبق أن درست إيجاد محصلة قوتين مؤثرتين على جسم جاسئ في نقطة واحدة، حيث مثلت هندسياً بقطر متوازي الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه. فهل يمكنك إيجاد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة واحدة هندسياً؟

تعلم



محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة هندسياً:

إذا أثرت مجموعة القوى $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \dots, \vec{Q}_n$ في نقطة مادية كما في شكل (١)

فباستخدام مقياس رسم مناسب

نرسم المتجه $\vec{O}A$ الذي يمثل $\vec{Q}_1$

ثم نرسم $\vec{A}B$ الذي يمثل $\vec{Q}_2$

ثم نرسم $\vec{B}C$ الذي يمثل $\vec{Q}_3$ وهكذا..... حتى نصل إلى نهاية المتجه $\vec{Q}_n$ وذلك برسم $\vec{H}K$.

المتجه $\vec{O}H$ الذي يعمل في الاتجاه الدوري المضاد يمثل محصلة القوى المعطاة، حيث:

$$\vec{O}H = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \dots + \vec{Q}_n$$

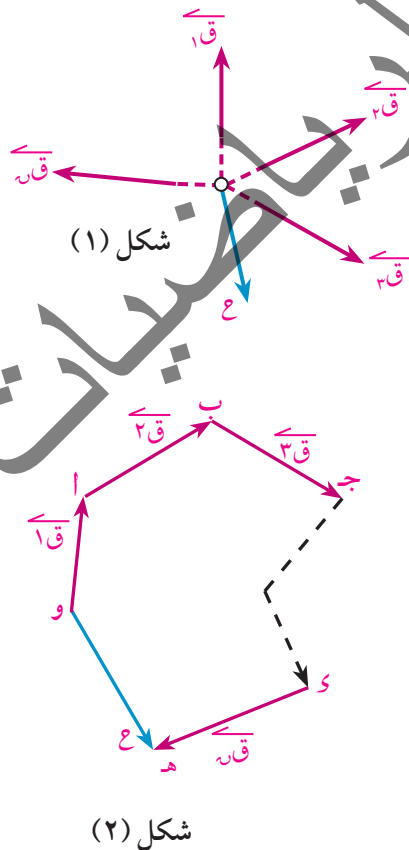
ويسمى هذا المضلع بمضلع القوى ومن السهل ملاحظة أن تكوين مضلع قوى ما هو إلا تطبيق لقاعدة مثلث قوى عدة مرات متتالية.

لمصطلحات الأساسية

- محصلة. Resultant
- مركبة جبرية. Algebraic component
- متجه وحدة. Unit vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية. Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

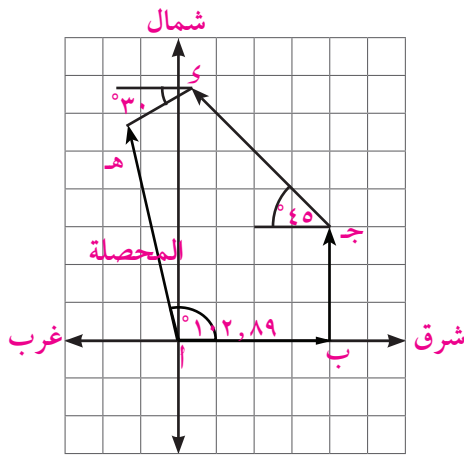




استخدام برنامج (GeoGebra)

$\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ ، $\vec{C}_3$ ، $\vec{C}_4$ أربع قوى مستوية تؤثر في نقطة من جسم جاسئ ، حيث $C_1 = 400$ نيوتن وتعمل في اتجاه الشرق ، $C_2 = 300$ نيوتن وتعمل في اتجاه الشمال ، $C_3 = 500$ نيوتن وتعمل في اتجاه الشمال الغربي ، $C_4 = 200$ نيوتن وتعمل بزاوية قياسها 30° جنوب الغرب. أوجد محصلة هذه القوى.

- ١ ارسم القطع المستقيمة الموجهة التي تمثل القوى بمقياس رسم ١:١٠٠
- ٢ ارسم من نقطة الأصل المتجه $\vec{AB}$ الذي طوله ٤ وحدات في اتجاه الشرق.
- ٣ ارسم من نقطة B المتجه $\vec{BC}$ الذي طوله ٣ وحدات في اتجاه الشمال.
- ٤ ارسم من نقطة C المتجه $\vec{CD}$ الذي طوله ٥ وحدات في اتجاه الشمال الغربي.
- ٥ ارسم من D المتجه $\vec{DE}$ الذي طوله ٢ وحدة في اتجاه 30° جنوب الغرب.



لاحظ المتجه $\vec{AE}$ بما تسميه؟
من الرسم السابق نجد أن:

$$||\vec{AE}|| = 5.68 \text{ وحدة طول.}$$

مقدار المحصلة = $5.68 \times 100 = 568$ نيوتن، وتصنع المحصلة مع الشرق زاوية قياسها 10.3° تقريباً.

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة تحليلياً

The resultant of coplanar forces meeting at a point analytically

إذا أثرت القوى $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ ، $\vec{C}_3$ ،، $\vec{C}_n$ المستوية والمتلاقية في نقطة وفي نظام إحداثي متعامد، وكانت تصنع الزوايا القطبية التي قياساتها θ_1 ، θ_2 ، θ_3 ،، θ_n ، هن وكانت $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ ،، $\vec{C}_n$ هما متجهي الوحدة في اتجاه $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ ،، $\vec{C}_n$ فإن: $\vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 + \dots + \vec{C}_n = \vec{R}$

وبتحليل كل قوة في اتجاهي $\vec{C}_1$ و $\vec{C}_2$ المتعامدين فإن:

$$\vec{R} = (C_1 \cos \theta_1, C_1 \sin \theta_1)$$

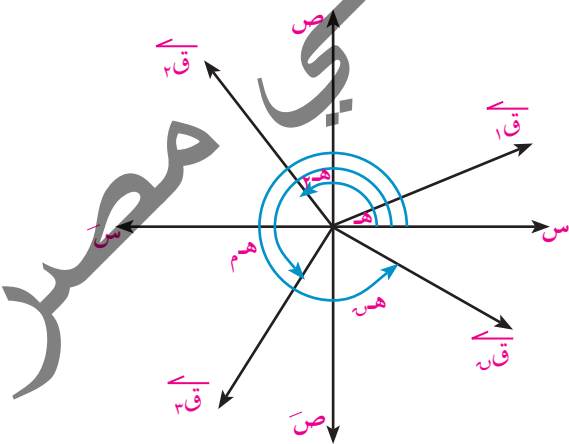
$$+ (C_2 \cos \theta_2, C_2 \sin \theta_2) +$$

$$+ \dots + (C_n \cos \theta_n, C_n \sin \theta_n)$$

$$\vec{R} = (C_1 \cos \theta_1 + C_2 \cos \theta_2 + \dots + C_n \cos \theta_n, C_1 \sin \theta_1 + C_2 \sin \theta_2 + \dots + C_n \sin \theta_n)$$

$$+ (C_1 \cos \theta_1, C_1 \sin \theta_1) +$$

$$\vec{R} = (C_1 \cos \theta_1 + C_2 \cos \theta_2 + \dots + C_n \cos \theta_n, C_1 \sin \theta_1 + C_2 \sin \theta_2 + \dots + C_n \sin \theta_n)$$





أضف إلى معلوماتك
يسمى الرمز $\vec{K}$ (سيجما)
برمز التجميع والعبارة $\vec{K}$
مجموع n عنصراً بدأ من
العنصر الأول.

يسمى المقدار: $\vec{K}$ قر جتاهـ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى
في اتجاه $\vec{S}$ ويرمز له بالرمز $\vec{S}$.

يسمى المقدار: $\vec{K}$ قر جتاهـ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى في
اتجاه $\vec{V}$ ويرمز له بالرمز $\vec{V}$.

ومن ذلك نكتب $\vec{E} = \vec{S} + \vec{V}$

وتكون E معيار المحصلة ، هـ هي قياس الزاوية القطبية لها

أى أن: $E = \sqrt{S^2 + V^2}$ ، ظاهـ = $\frac{V}{S}$

مثال

١ أربع قوى مستوية تؤثر في نقطة مادية، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر في اتجاه الشرق، والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر في اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة مقدارها ٥ نيوتن وتؤثر في اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة ٣ نيوتن وتؤثر في اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

القوى ٤، ٢، ٥، ٣ نيوتن قياس زواياها القطبية هي ٠°، ٦٠°، ١٢٠°، ٢١٠° على الترتيب نوجد المجموع الجبرى لمركبات القوى في اتجاه $\vec{S}$

$$S = 4 \cos 0^\circ + 2 \cos 60^\circ + 5 \cos 120^\circ + 3 \cos 210^\circ$$

$$= 4 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{8 - 1 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{7 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = 4 \sin 0^\circ + 2 \sin 60^\circ + 5 \sin 120^\circ + 3 \sin 210^\circ$$

$$= 0 + \sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3}{2} = \frac{7\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$E = \sqrt{S^2 + V^2} = \sqrt{\left(\frac{7 - 2\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3} - 3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{49 - 28\sqrt{3} + 12 + 147 - 42\sqrt{3} + 9}{4}} = \sqrt{\frac{215 - 70\sqrt{3}}{4}}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{V}{S} = \frac{7\sqrt{3} - 3}{7 - 2\sqrt{3}}$$

$$\therefore S > 0, V < 0$$

$$\therefore \text{هـ} = 120^\circ$$

أى أن مقدار محصلة القوى يساوى ٤ نيوتن، وتصنع زاوية قطبية قياسها ١٢٠°

٢ حاول أن تحل

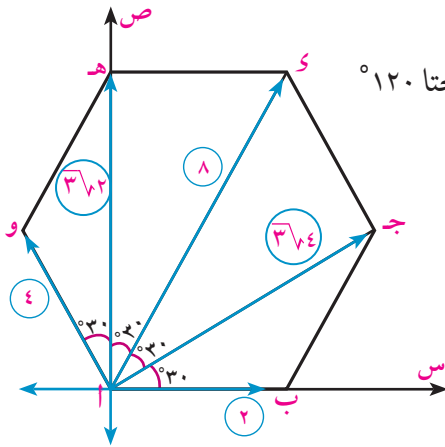
١ تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠ نيوتن فى نقطة، بحيث كانت الزاوية بين اتجاهى القوتين الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى القوتين الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى القوتين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

مثال

٢) أ ب ج د هـ وشكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٨ ، ٣√٢ ، ٤ ث كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\vec{AB}$ ، $\vec{AD}$ ، $\vec{AE}$ ، $\vec{AH}$ ، $\vec{AO}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

باعتبار $\vec{AB}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون الزوايا القطبية للقوى هى: 0° ، 30° ، 60° ، 90° ، 120° على الترتيب.



$$\therefore \text{س} = 2 \text{ جتا } 0^\circ + 3\sqrt{2} \text{ جتا } 30^\circ + 8 \text{ جتا } 60^\circ + 3\sqrt{2} \text{ جتا } 90^\circ + 4 \text{ جتا } 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 - 0 \times 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 8 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} + 2 =$$

$$= 2 + 6 + 9 + 2 = 19 \text{ نيوتن}$$

$$\text{ص} = 2 \text{ جتا } 0^\circ + 3\sqrt{2} \text{ جتا } 30^\circ + 8 \text{ جتا } 60^\circ + 3\sqrt{2} \text{ جتا } 90^\circ + 4 \text{ جتا } 120^\circ$$

$$= 2 + 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 0 + 4 \times (-\frac{1}{2}) =$$

$$= 2 + 3\sqrt{2} + 4 - 2 = 4 + 3\sqrt{2} = 4 + 4.24 = 8.24 \text{ نيوتن}$$

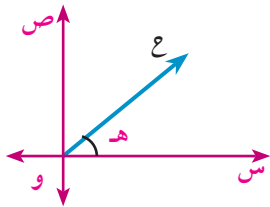
$$\therefore \vec{R} = 19\hat{s} + 8.24\hat{v}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{19^2 + 8.24^2} = \sqrt{361 + 67.9} = \sqrt{428.9} = 20.7 \text{ نيوتن}$$

$$\text{ظاه} = \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{س} < 0, \text{ص} < 0 \therefore \angle = 60^\circ$$

أي أن المحصلة تعمل فى اتجاه $\vec{AO}$



تمارين (١ - ٣)

أكمل مايتأتى:

١) إذا كانت القوى $\vec{C}_1 = 2\vec{s}$ ، $\vec{C}_2 = \vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{C}_3 = \vec{v} - 6\vec{s}$ فإن:

مقدار محصلة القوى = ... واتجاهها = ...

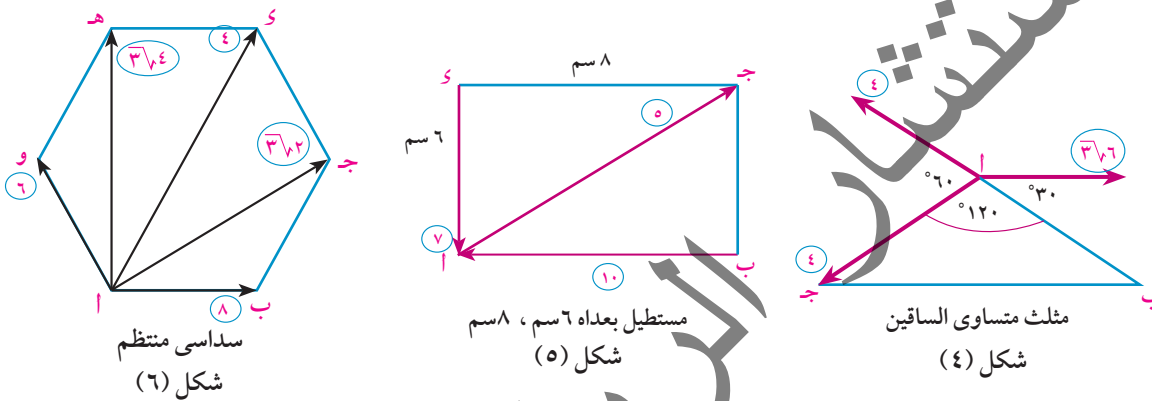
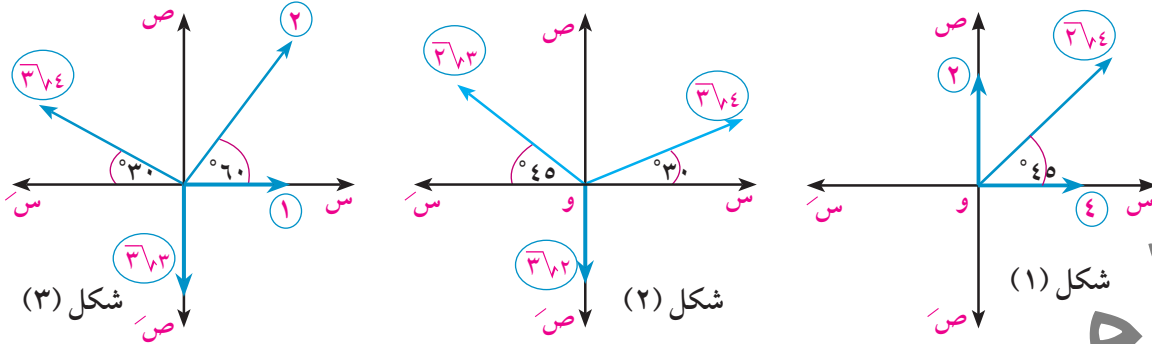
٢) إذا كانت القوى $\vec{C}_1 = 2\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{C}_2 = \vec{v} - 4\vec{s}$ ، $\vec{C}_3 = 3\vec{v} - \vec{s}$ فإن:

أ = ... ، ب = ...

٣) إذا كان $\vec{C}_1 = 3\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{C}_2 = \vec{v} - \vec{s}$ ، $\vec{C}_3 = 4\vec{s} - \vec{v}$ ، $\vec{C}_4 = 6\vec{s} - 4\vec{v}$ فإن:

أ = ... ، ب = ...

٤ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المبينة في كل شكل من الأشكال الآتية:



٥ أثرت القوى ٣ ، ٦ ، ٣√٩ ، ١٢ ث كجم في نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

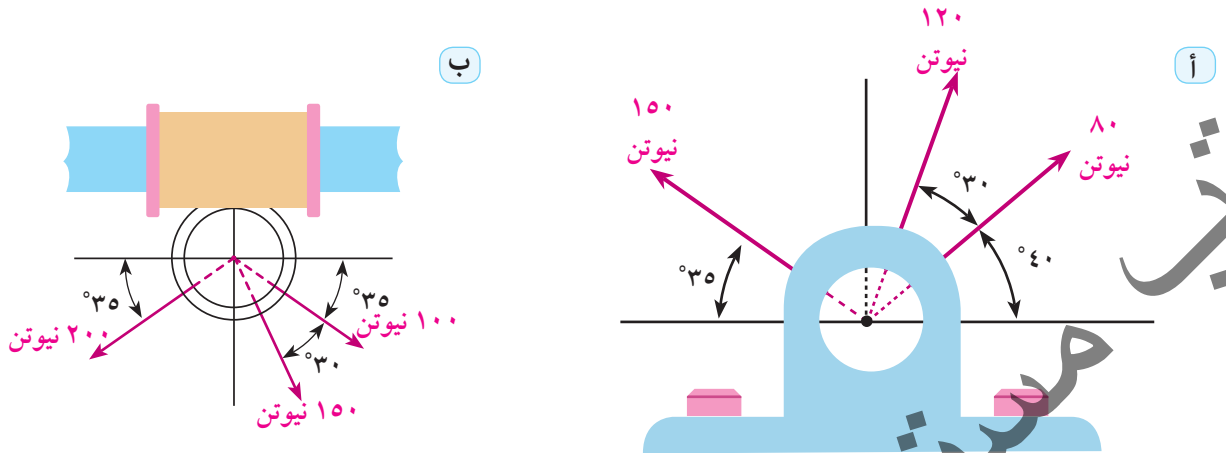
٦ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية، الأولى نحو الشرق، والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال، والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

٧ أربع قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣√٣٠ ، ٤٠ ث جم تؤثر في نقطة مادية، الأولى تؤثر في اتجاه الشرق، والثانية تؤثر في اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة تؤثر في اتجاه ٣٠° شمال الغرب، والرابعة تؤثر في اتجاه يصنع ٦٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

٨ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، م نقطة تلاقي متوسطاته أثرت القوى التي مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن في نقطة مادية في الاتجاهات $\vec{m}$ جـ ، $\vec{m}$ بـ ، $\vec{m}$ أـ . أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

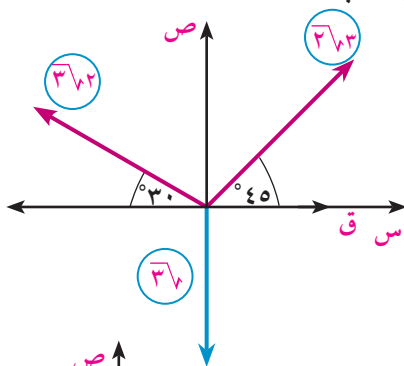
٩ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم، هـ $\exists$ ب جـ بحيث ب هـ = ٥ سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٣√٤ ، ٩ ث جم في الاتجاهات $\vec{ab}$ ، $\vec{ah}$ ، $\vec{jd}$ ، $\vec{ad}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

١٠ من بيانات الشكل . أوجد مقدار واتجاه المحصلة .

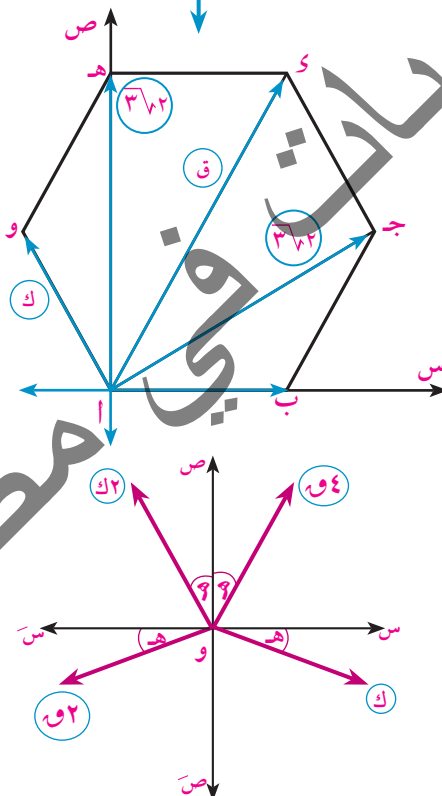


١١) إذا كانت $\vec{C} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$ ، $\vec{C} = 1\vec{u} + 6\vec{v}$ ، $\vec{C} = -14\vec{u} + 3\vec{v}$ ، ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\vec{C} = (10, 2)$. أوجد قيمتي u ، v .

١٢) في الشكل المقابل: إذا كان مقدار محصلة القوى تساوي ٣٦,٣ نيوتن، فأوجد قيمة α ، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى.



١٣) في الشكل المقابل : إذا كانت محصلة القوى تساوي ٢٠ ث كجم، وتعمل في اتجاه $\vec{A}$ أوجد قيمتي Q ، K .



تفكير ابداعي:

١٤ الشكل المقابل: يبين أربع قوى مستوية ومتلاقية في نقطة (و) في الاتجاهات الموضحة حيث جا هـ = $\frac{4}{5}$ ، وكانت محصلة هذه القوى تساوي ٢٨٨ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع $\overrightarrow{OS}$ أوجد قيمتي و، هـ.

اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة

Equilibrium of a particle under the action of coplanar forces meeting at a point

إذا أثرت قوتان أو أكثر في جسم جاسئ، ولم يتغير وضع الجسم قيل إن هاتين القوتين أو هذه القوى متزنة، وأن الجسم متزن، ويعد أبسط أنواع الاتزان هو الناتج عن تأثير قوتين في جسم جاسئ.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

Equilibrium of a rigid body under the action of two forces

عمل تعاوني

١- ضع جسمًا وزنه ٢٠ ث كجم على كفة ملساء لميزان ضغط أفقي، ولاحظ قراءة الميزان حينئذٍ. كما في الشكل (١).

٢- اطلب من زميلك أن يربط نفس الجسم بخيط خفيف أملس، ويربط نهاية الخيط في حُطاف ميزان زنبركي، ولاحظ قراءة الميزان في وضع السكون.

٣- قارن بين النتائج في كل من التجربتين، ماذا تلاحظ؟
نلاحظ أن:

كل من قوتي رد الفعل R في التجربة الأولى وقوة الشد في الخيط S في التجربة الثانية تساوي ٢٠ ث كجم وهو وزن الجسم.

تعلم

شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان:

- ١- متساويتين في المقدار.
- ٢- متضادتين في الاتجاه.
- ٣- خطي عملهما على استقامة واحدة.

سوف نتعلم

- اتزان جسم تحت تأثير قوتين.
- اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة.
- قاعدة مثلث القوى.
- قاعدة لامي.
- نظرية القوى الثلاث.
- اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة.

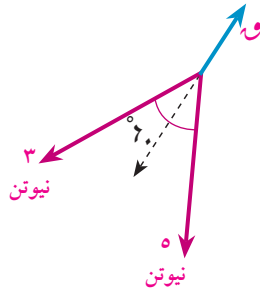
لمصطلحات الأساسية

- قاعدة مثلث القوى.
- Triangle of forces rule
- قاعدة لامي.
- Lami's rule
- مضلع القوى.
- Polygon of forces

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال



٣ إذا كانت القوة التي مقدارها ق تتزن مع قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللذان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأوجد قيمة ق؟

الحل

نوجد محصلة القوتين ٥ ، ٣ نيوتن من القانون:

$$C = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \cos 60^\circ} = 7 \text{ نيوتن}$$

$$C = 7 \text{ نيوتن}$$

∴ القوة (ق) ومحصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن في حالة اتزان. ∴ ق = ٧ نيوتن

٤ حاول أن تحل

١ إذا كانت القوة التي مقدارها ق تتزن مع القوتين المتعامدتين التي مقدار كل منها ٥ ، ١٢ نيوتن فأوجد قيمة ق.

نقل نقطة تأثير القوة إلى أي نقطة على خط عملها

نشاط



١ أحضر الأدوات الآتية:

ميزاناً زبركياً - قرصاً رقيقاً من المعدن - خيطاً - ميزاناً مائياً - مسطرة.

٢ اضبط النضد أفقياً باستخدام الميزان المائى.

٣ صل القرص بخيطين عند الثقبتين أ ، ب ثم اربط الطرفين الآخرين للخيطين بميزان الزبرك.

٤ ثبت حلقة أحد الميزانين فى مسمار مثبت فى النضد عند نقطة (ج) واجذب الميزان الآخر ثم ثبته عند نقطة (د) فى مسمار آخر يبعد عن المسمار الأول بحيث يكون الخيطان مشدودين كما بالشكل.

٥ أوجد مقدار الشد المؤثر فى الخيط وسجل النتائج.

٦ غير موضع تثبيت طرف الخيط من النقطة أ إلى النقاط أ١ ، أ٢ ، ... وكذلك تغيير الطرف الآخر للخيط من النقطة ب إلى النقاط ب١ ، ب٢ ، ... ولاحظ قراءة ميزان الزبرك فى كل حالة وسجل النتائج - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنه عند حدوث التوازن تتساوى القراءتان تماماً.

من النشاط السابق نستنتج أن :

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.

مثال

١ القوى ٣، ٥، ٤ نيوتن متوازنة كما في الشكل المقابل.
أوجد قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن.

الحل

٠: مجموعة القوى متزنة.

٠: محصلة القوتين ٣، ٥ نيوتن تتزن مع القوة ٤ نيوتن
ويفرض أن قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن γ فإن:

$$٤ = ٣ + ٥ \quad \text{جتا } \gamma$$

$$\text{بالتعويض عن: } ٤ = ٣ + ٥, \quad ٣ = ١٠, \quad ٥ = ٢٠$$

$$١٦ = ٩ + ٢٥ + ٣ \times ٢ \times ٥ \quad \text{جتا } \gamma \quad ٣٠ \quad \text{جتا } \gamma = ١٨$$

$$\text{أى أن جتا } \gamma = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{٠: ق(} \gamma \text{) = } ١٨٠^\circ - ٤٩^\circ ٧' ٥٣'' = ١١٠^\circ ٥٢' ١٢''$$

٢ حاول أن تحل

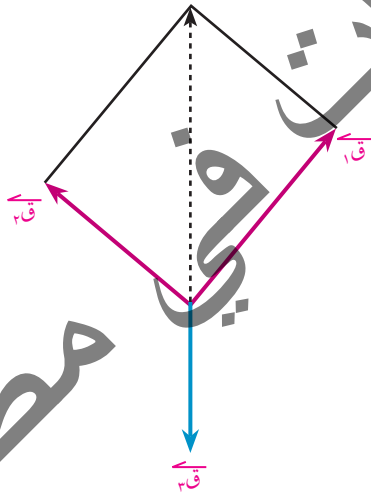
٢ إذا كانت القوى ٧، ٨، ١٣ نيوتن متوازنة فأوجد قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية.

اتزان جسيم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة

Equilibrium of rigid body under the action of three coplanar forces meeting at a point

سبق أن درست شروط اتزان جسيم جاسئ تحت تأثير قوتين، وسوف ندرس توازن ثلاث قوى تقع خطوط عملها في مستوى واحد وتتلاقى في نقطة واحدة، وهذه القوى إما أن تؤثر في نقطة مادية (أوجسيم) أو تؤثر على جسيم بحيث تتلاقى خطوط عملها في نقطة واحدة.

تعلم



إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففى الشكل المقابل:

لكي تتزن القوى الثلاث يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث.

تعبير شفهي:

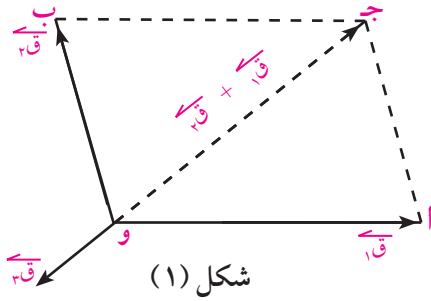
بين أيًا من القوى التي لها المقادير الآتية يمكن أن تكون متزنة؟ فسر إجابتك.
على اعتبار أن القوى تؤثر في نقطة واحدة و في اتجاهات مختلفة.

ج ٤، ١٠، ٦ نيوتن.

ب ٣، ٥، ٧ نيوتن

أ ٣، ٥، ٩ نيوتن

قاعدة مثلث القوى Triangle of forces



شكل (١)

شكل (١): يمثل القوتان $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ تؤثران على جسم جاسئ

تعملان في $\vec{O}_A$ ، $\vec{O}_B$

وتكون محصلة هاتين القوتين هي $(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)$ والتي تعمل في القطر $\vec{O}_C$ من متوازي الأضلاع و $\vec{O}_A$ ج ب.

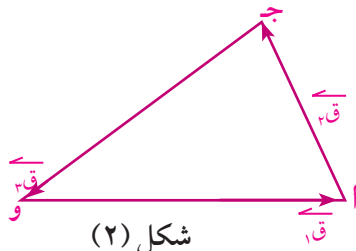
$\vec{Q}_3$ تساوى $(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)$ في المقدار وتضادها في الاتجاه

أى أن: $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = \vec{0}$. $\therefore \vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ، $\vec{Q}_3$ مجموعة متزنة.

تحقق من فهمك

بين أن مجموعة القوى $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ، $\vec{Q}_3$ مجموعة متزنة حيث :

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_3 \quad \vec{Q}_2 = \vec{Q}_3 - \vec{Q}_1 \quad \vec{Q}_3 = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2$$



شكل (٢)

شكل (٢): يمثل مثلث القوى للمجموعة المتزنة $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ، $\vec{Q}_3$

حيث إن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المتناظرة.

$$\frac{Q_1}{a} = \frac{Q_2}{b} = \frac{Q_3}{c}$$

أى أن: إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة، ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المتناظرة.

فكر: استخدم قاعدة الجيب لإثبات قاعدة مثلث القوى.

مثال

٢ علّق ثقل مقداره ١٢ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف طوله ١٣٠ سم، والطرف الآخر للخيط مثبت في نقطة على حائط رأسي، جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٥٠ سم من الحائط. أوجد مقدار كل من القوة والشد في الخيط.

الحل

الثقل متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

◀ قوة الوزن (١٢ نيوتن) وتعمل رأسياً لأسفل.

◀ القوة الأفقية ق.

◀ الشد في الخيط ش ويعمل في $\vec{O}_A$

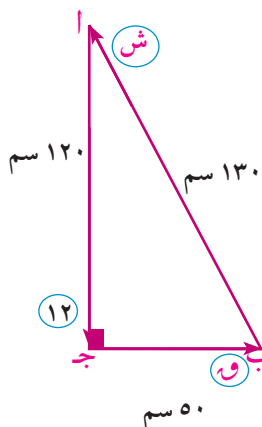
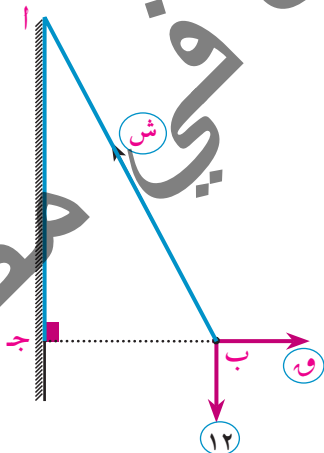
نوجد طول $\vec{O}_C$ من فيثاغورث.

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{(130)^2 - (50)^2} = 120 \text{ سم}$$

المثلث ب أ ج مثلث القوى:

$$\frac{Q}{12} = \frac{12}{120} = \frac{S}{130}$$

ش = ١٣ نيوتن ، ق = ٥ نيوتن

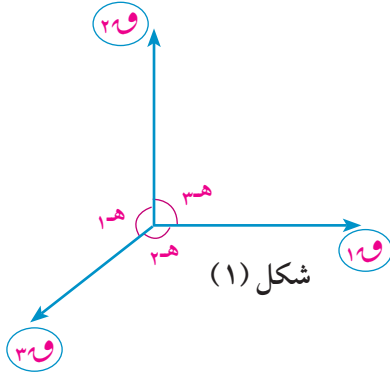


٤ حاول أن تحل

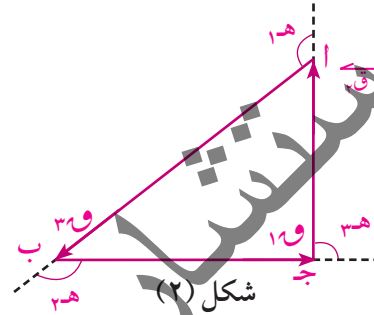
٣ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف طوله ٥٠ سم، مثبت طرفه الآخر في نقطة في سقف الحجرة أزيح الثقل بقوة أفقية، حتى اتزن وهو على بعد ٤٠ سم من السقف، أوجد مقدار القوة الأفقية والشد في الخيط.

قاعدة لامي lamī's theorem

إذا أثرت القوى Q_1 ، Q_2 ، Q_3 في نقطة مادية كما في الشكل (١) وكانت متزنة فإنه يمكن تمثيلها بأضلاع المثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد كما في الشكل (٢)



شكل (١)



باستخدام قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{Q_1}{\sin 120^\circ} = \frac{Q_2}{\sin 120^\circ} = \frac{Q_3}{\sin 120^\circ}$$

إذا أُنزِلَ جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرتين.

مثال

٣ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠، ق، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°، فأوجد مقدار كل من ق، ك.

الحل

المجموعة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الآتية:

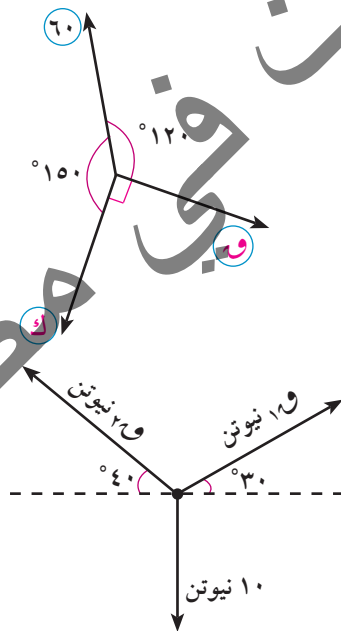
القوة ٦٠ نيوتن، القوة ق نيوتن، القوة ك نيوتن بتطبيق قاعدة لامي:

$$\frac{60}{\sin 120^\circ} = \frac{Q}{\sin 90^\circ} = \frac{K}{\sin 150^\circ}$$

أي أن: ق = ٣٠ نيوتن، ك = ٣٦.٣٠ نيوتن

٤ حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقي بزاوية قياسها ٤٠°. أوجد ق_١، ق_٢ في حالة الاتزان.



قاعدة:

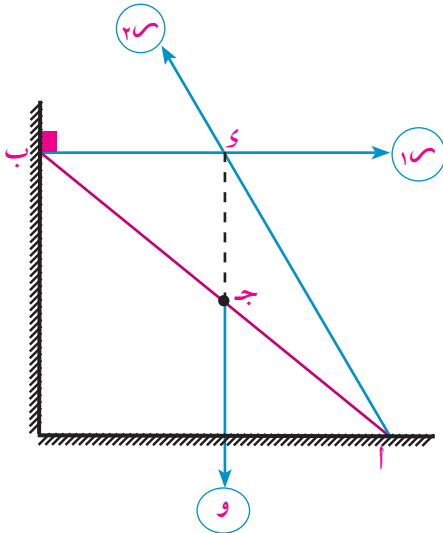
إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

مثال توضيحي: إذا اتزن قضيب منتظم السمك والكثافة وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن:

مركز ثقل وزن القضيب يعمل فى منتصفه واتجاهه رأسياً لأسفل.

رد فعل الحائط الرأسى (ر) يكون عمودياً على الحائط ويعمل فى اتجاه ب.

رد فعل الأرض الأفقية الخشنة (ر) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\vec{r}$ الذى يمر بالنقطة γ (نقطة تلاقى خطى عمل $\vec{r}$ ، $\vec{w}$) كما فى الشكل.



مثال

٤ كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ١,٥ ث كجم وطول نصف قطرها ٢٥ سم ، ربطت من إحدى نقط سطحها ب بخيط طوله ٢٥ سم ومربوط طرفه الآخر γ من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

تذكر أن

مركز ثقل الكرة المتجانسة يقع فى مركزها الهندسي.

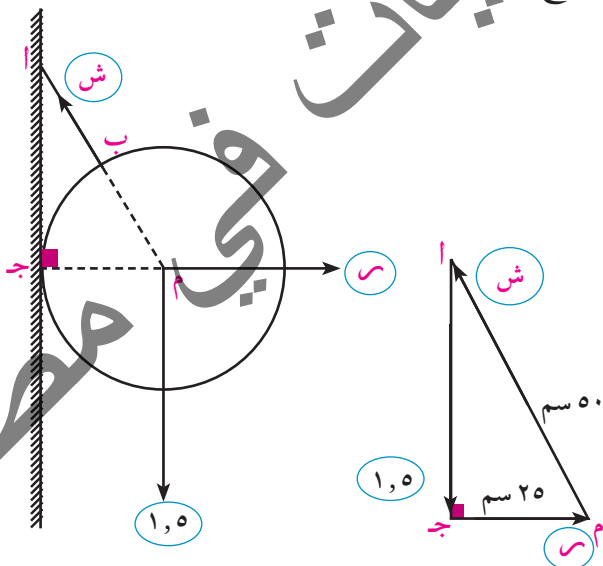
الحل

الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث:

وزن الكرة ١,٥ ث كجم ويؤثر رأسياً لأسفل.

رد فعل الحائط على الكرة (ر) ويؤثر عند نقطة تماس الكرة مع الحائط، ويعمل فى اتجاه عمودى على الحائط ماراً بالمركز (م).

الشد فى الخيط (ش) ويعمل فى اتجاه ب $\vec{A}$ ويمر بالمركز (م) نقطة تلاقى قوتي وزن الكرة ورد فعل الحائط. (نظرية).



المثلث م أ ج هو مثلث القوى، حيث

$$م أ = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠ سم$$

ومن نظرية فيثاغورث: $أ ج = \sqrt{٢٥^2 - ٢٥^2} = ٣٦,٢٥ سم$

$$= ٣٦,٢٥ سم$$

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى:

$$\frac{ش}{٢٥} = \frac{١,٥}{٣٦,٢٥} = \frac{ر}{٥٠}$$

أى أن: ش = ٣٦ ث كجم ، ر = $\frac{٣٦}{٢}$ ث كجم.

فكر: هل يمكنك حل المسألة السابقة بطرق أخرى؟ اذكر هذه الطرق ثم حل المسألة بإحدى هذه الطرق.

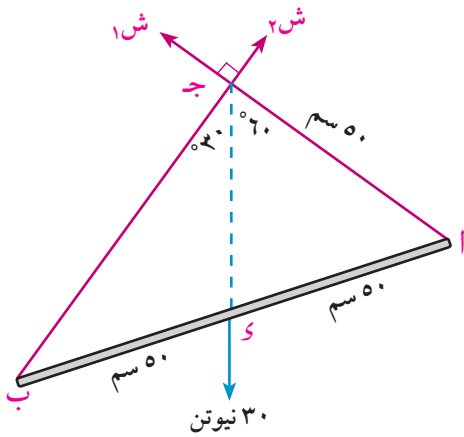
٩ حاول أن تحل

٥ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفي خيط خفيف طوله ٢٠ سم، ومثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد في وضع التوازن كلاً من الشد في الخيط ورد فعل الحائط.

مثال

٥ علق قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما في خُطاف ، فإذا كان الحبلان متعامدين، وطول أحدهما ٥٠ سم. فأوجد مقدار الشد في كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقاً تعليقاً حراً مطلقاً وفي حالة اتزان.

الحل



القضيب متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزنه ٣٠ نيوتن، ويعمل رأسياً لأسفل ويؤثر عند منتصفه ، الشد في الحبلين ش_١ ، ش_٢ ويعملان في الاتجاهين أ ج ، ب ج على الترتيب ويتقاطعان على التعامد عند نقطة ج.

∴ ج د مرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

$$\therefore \text{ج د} = \frac{1}{4} \text{ أ ب} = ٥٠ \text{ سم}$$

∴ أ ج د مثلث متساوي الأضلاع

$$\therefore \angle \text{أ ج د} = ٦٠^\circ ، \angle \text{ب ج د} = ٣٠^\circ$$

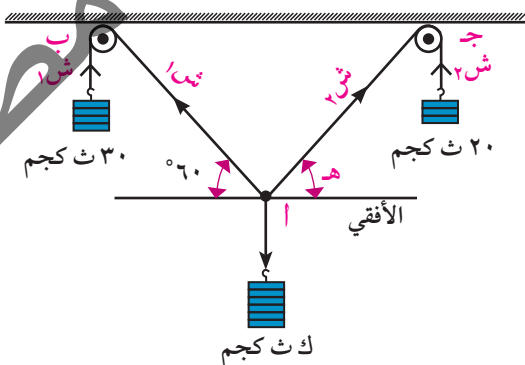
بتطبيق قاعدة لامي:

$$\frac{\text{ش}_1}{\text{ج د}} = \frac{\text{ش}_2}{\text{ج د}} = \frac{\text{ش}_3}{\text{ج د}} \quad \text{ومنها ش}_1 = ١٥ \text{ نيوتن ، ش}_2 = ٣٦,١٥ \text{ نيوتن}$$

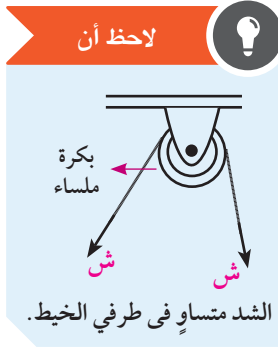
فكر: استخدم طرق أخرى لحل المسألة السابقة.

مثال

٦ في الشكل المقابل: ثقل مقداره ك معلق في طرف خيط وينتهي طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوتين عند ب، ج ويحملان ثقلين مقدار كل منهما ٣٠ ، ٢٠ ث جم. أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ في وضع الاتزان



الحل



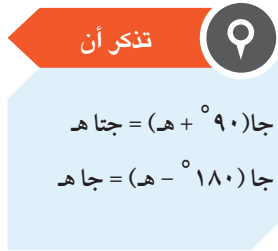
في الشكل السابق: نفرض أن ش_١ ، ش_٢ هما الشدان في الخيطين ويعملان في اتجاهي أ ب ، أ ج
البكرتان ملساوتان لذلك فإن: ش_١ = ٣٠ ث كجم ، ش_٢ = ٢٠ ث كجم
الجسم الذي ثقله ك متزن تحت تأثير القوى الثلاث:
وزن الجسم ك ث كجم والشد في الخيطين ش_١ ، ش_٢

بتطبيق قاعدة لامي:

وبالتبسيط

$$\frac{\frac{ك}{\text{جا } (90^\circ + 60^\circ)}}{[(60^\circ - 180^\circ)]} = \frac{\frac{20}{\text{جا } (90^\circ + 60^\circ)}}{[(90^\circ + 60^\circ)]} = \frac{\frac{30}{\text{جا } (90^\circ + 60^\circ)}}{[(90^\circ + 60^\circ)]}$$

$$\frac{ك}{\text{جا } (60^\circ + 180^\circ)} = \frac{20}{\text{جا } (90^\circ + 60^\circ)} = \frac{30}{\text{جا } (90^\circ + 60^\circ)}$$



أي أن جتا هـ = $\frac{3}{4}$ أي أن هـ = $41^\circ 24' 35''$
ك = $40 \times \text{جا } (60^\circ + 41^\circ 24' 35'')$
أي أن ك $\approx 39,210.7$ ث كجم

٤ حاول أن تحل

٦ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث جم؛ حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأس تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط. أوجد مقدار القوة ومقدار الشد في الخيط.

اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية في نقطة



مضلع القوى: Polygon of forces

باستخدام برنامج (Geo Gebra):

مثل القوى التي مقاديرها ٤٠٠ ، ١٠٠ ، ٣٠٠ ، ١٠٠ دالين والتي تعمل بزوايا قطبية قياساتها كالآتي: ٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠° ، ٢٤٠° على الترتيب. ماذا تلاحظ؟

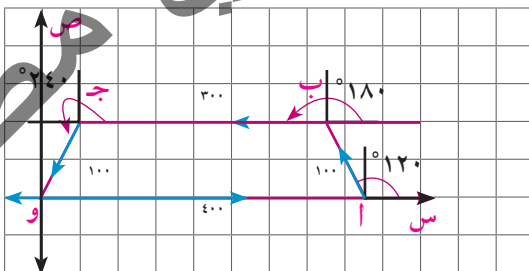
نلاحظ أن:

نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة ينطبق على نقطة بداية خط عمل القوة الأولى في مضلع القوى الموضح بالشكل.

أي أنه قد تكون مضلع القوى المقفل و أ ب جـ.

نستنتج من هذا النشاط أن:

الشرط اللازم والكافي لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية في نقطة هو أن تمثل هذه القوى بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة في اتجاه دورى واحد.



الطريقة التحليلية لدراسة اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة.

في النشاط السابق يمكن إيجاد المركبتين السينية والصادية لمجموعة القوى كالآتي:

$$س = ٤٠٠ + ٠ + ١٠٠ + ١٢٠ + ٣٠٠ + ١٨٠ + ١٠٠ + ٢٤٠$$

$$= ٤٠٠ - \frac{1}{4} \times ١٠٠ - ٣٠٠ - \frac{1}{4} \times ١٠٠ = \text{صفر}$$

$$ص = ٤٠٠ + ٠ + ١٠٠ + ١٢٠ + ٣٠٠ + ١٨٠ + ١٠٠ + ٢٤٠$$

$$= ٣٦٥٠ - ٠ + ٣٦٥٠ + ٠ = \text{صفر}$$

نستنتج من ذلك أنه لكي تكون مجموعة القوى المستوية والمتلاقية في نقطة متزنة يجب أن تكون:

المجموع الجبري لمركبات القوى في اتجاه و س = صفر

المجموع الجبري لمركبات القوى في اتجاه و ص = صفر

أي أن س = صفر، ص = صفر

ويمكن التعبير عن شرط توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة كما يأتي : إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة فإن المجموع الجبري للمركبات الجبرية لهذه القوى في كل من اتجاهين متعامدين يساوي صفرًا.

مثال

١ إذا كانت $\vec{Q}_1 = ٥\vec{S} - ٣\vec{V}$ ، $\vec{Q}_2 = ٧\vec{S} + ٢\vec{V}$ ، $\vec{Q}_3 = ٢\vec{S} - ٣\vec{V}$ ، فأثبت أن مجموعة القوى $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ ، $\vec{Q}_3$ متوازنة.

الحل

$$\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = \vec{Q}$$

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = (٥ - ٣ + ٢)\vec{S} + (-٣ + ٢ - ٣)\vec{V} = ٠$$

أي أن مجموعة القوى متزنة.

٢ حاول أن تحل

٧ إذا كانت القوى $\vec{Q}_1 = ٤\vec{S} - ٣\vec{V}$ ، $\vec{Q}_2 = ١\vec{S} - ٢\vec{V}$ ، $\vec{Q}_3 = ٦\vec{S} - ١\vec{V}$ ، فأثبت أن مجموعة القوى متلاقية في نقطة ومتزنة فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

مثال

٢ الشكل المقابل: يمثل القوى ١٦ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن، والتي تؤثر في المربع أ ب ج د في الاتجاهات $\vec{AB}$ ، $\vec{AD}$ ، $\vec{BA}$ ، $\vec{DA}$ ، $\vec{HA}$ على الترتيب حيث هـ منتصف ج د. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

الحل

من الشكل المقابل نجد أن القوى ١٦ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن

زواياها القطبية هي: ٠° ، ٩٠° ، ٢٢٥° ، $(١٨٠^\circ + \theta)$

∴ س = ١٦ جتا ٠° + ٢٠ جتا ٩٠°

$$+ 3\sqrt{12} \text{ جتا } 225^\circ + 5\sqrt{4} \text{ جتا } (\theta + 180^\circ)$$

$$= 16 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \times 3\sqrt{12} - 0 + 5\sqrt{4} \text{ جتا } \theta$$

$$= 16 - 12 - 16 = \frac{1}{5\sqrt{3}} \times 5\sqrt{4} - \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\text{ص} = 16 \text{ جتا } 0^\circ + 20 \text{ جتا } 90^\circ + 3\sqrt{12} \text{ جتا } 225^\circ$$

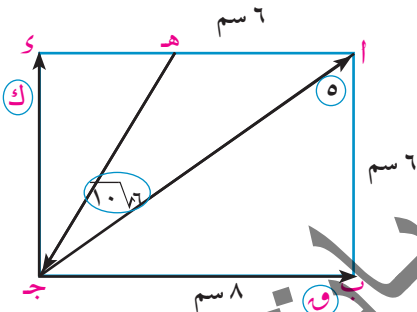
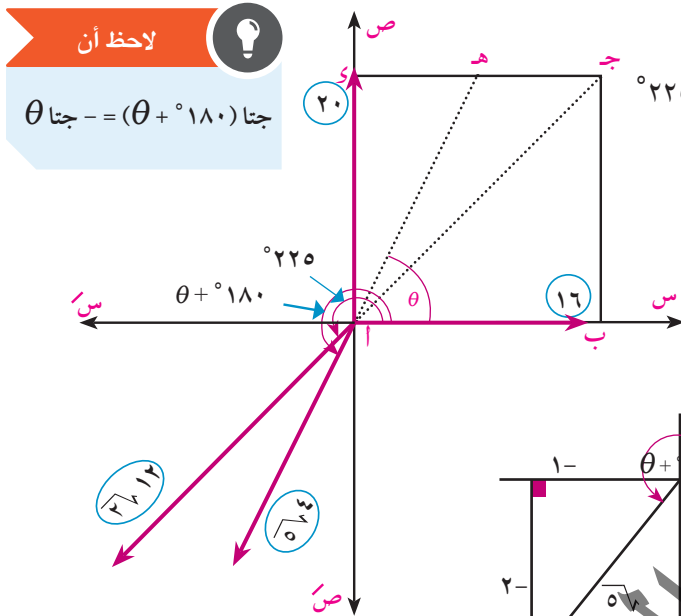
$$+ 5\sqrt{4} \text{ جتا } (\theta + 180^\circ)$$

$$= 20 + 0 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \times 3\sqrt{12} - 5\sqrt{4} \text{ جتا } \theta$$

$$= 20 - 12 - 20 = \frac{2}{5\sqrt{3}} \times 5\sqrt{4} - \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\text{ص} = \text{صفر} ، \text{صفر} = \text{ص}$$

∴ المجموعة متزنة.



٤ حاول أن تحل

٨ الشكل المقابل: يمثل القوى التي مقاديرها ق، هـ، ك، ١٠، ٦ نيوتن والمتزنة، والتي تؤثر في المستطيل أ ب ج د في الاتجاهات

ج ب، ج أ، ج د، هـ ج حيث أ ب = ٦ سم، ب ج = ٨ سم،

أ هـ = ٦ سم. أوجد قيمة ق، ك.

تمارين (١ - ٤)

أكمل ما يأتي:

١ الشرط اللازم والكافي لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية في نقطة هو أن تمثل هندسيًا بـ

٢ شرط اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة هي أن تكون ،

٣ إذا كانت ق_١ = ٤ سم + ب سم، ق_٢ = ٧ سم - ٢ سم، ق_٣ = ١ سم - ٣ سم متزنة فإن:

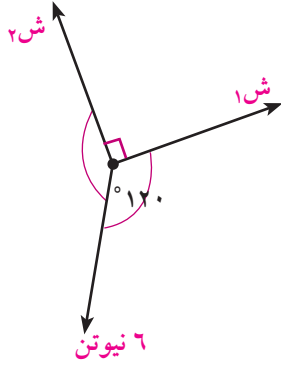
أ = ... ، ب = ...

٤ إذا كانت القوة التي مقدارها ق متزنة مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٣، ٤ نيوتن فإن مقدار ق = ...

٥ إذا مُثلت ثلاث قوى مستوية ومتزنة ومأخوذة في اتجاه دورى واحد بأضلاع مثلث فإن أطوال أضلاع المثلث

تكون متناسبة مع

٦ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع

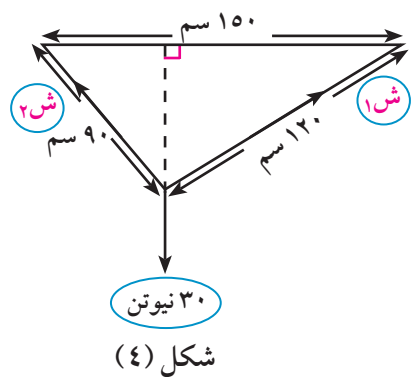
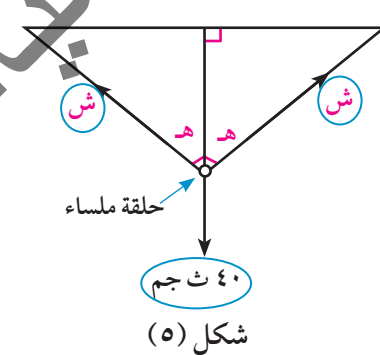
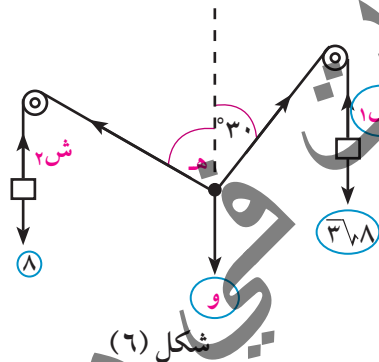
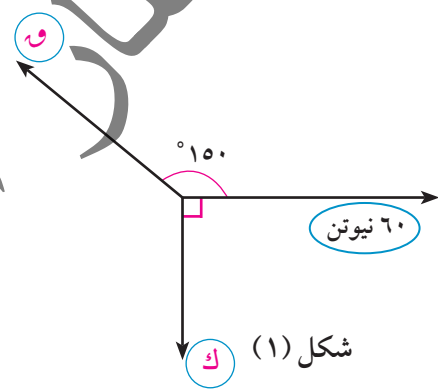
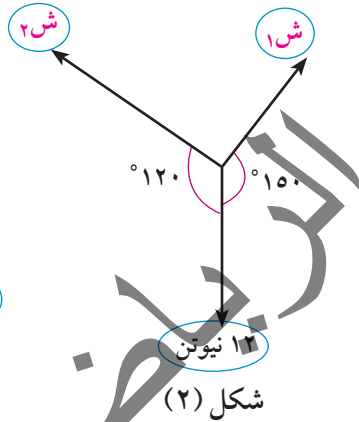
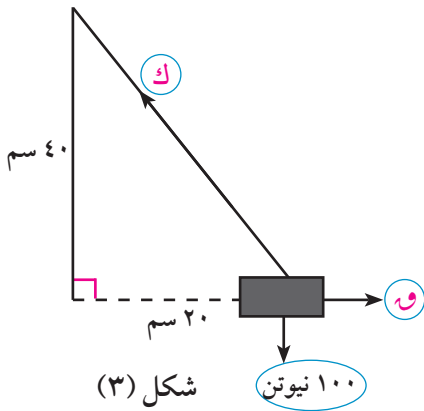


٧ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى

٨ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين يساوي

٩ في الشكل المقابل: مجموعة القوى متزنة ومتلاقية في نقطة
ش_١ = ... نيوتن ، ش_٢ = ... نيوتن.

١٠ يمثل كل شكل من الأشكال الآتية مجموعة من القوى المستوية المتزنة والمتلاقية في نقطة. أوجد القيمة المجهولة سواء كانت قوة أو قياس زاوية:



١١ يمثل الشكل المقابل أربعاً من القوى المستوية والمتلاقية في نقطة و.

أ أثبت تحليلياً أن مجموعة القوى متزنة .

ب **نشاط:** استخدم برنامج (Geo gebra) لتمثيل هذه القوى بمضلع قوى مقفل باستخدام مقياس رسم مناسب.

١٢) علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث جم من أحد طرفي خيط طوله ٢٨ سم، مثبت طرفه الآخر في نقطة في سقف حجرة، أثرت على الجسم قوة فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤ سم رأسياً أسفل السقف، فإذا كانت القوة في وضع الاتزان عمودية على الخيط فأوجد مقدار كل من القوة والشد في الخيط.

١٣) علق ثقل مقدار ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد في كل من الخيطين.

١٤) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها ٥° ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم. فأوجد مقدار الشد في الخيط الثاني.

١٥) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٥° حيث جا = ٦، ٠ وحفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

١٦) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.

١٧) كرة معدنية ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط الرأسى والمستوى المائل.

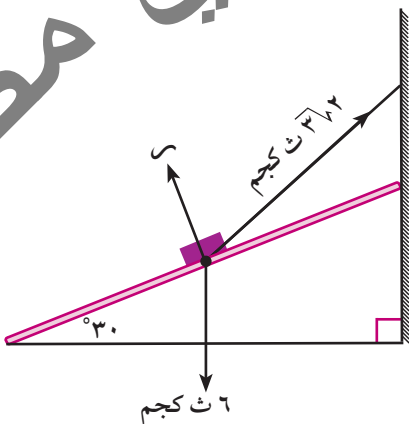
١٨) علق قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن من طرفيه بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة. فإذا كان طول الخيطين ٣٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب فأوجد الشد في كل من الخيطين.

١٩) خمس قوى مستوية مقاديرها ق، ٦، ٢٦٤، ٢٦٥، ك ث كجم متزنة وتؤثر في نقطة مادية في اتجاهات الشرق والشمال والشمال الغربى والجنوب الغربى والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار كل من ق، ك.

٢٠) أثرت القوى المستوية ٥، ٤، ق، ٣، ك، ٧ ث كجم في نقطة مادية والزوايا بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠°. أوجد مقدار كل من ق، ك حتى تكون المجموعة في حالة اتزان.

تفكير إبداعى:

٢١) فى الشكل المقابل جسم وزنه ٦ ث كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة شد مقدارها ٣٦٢ ث كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم.



ملخص الوحدة

وحدات القياس فى النظام الدولى للوحدات (SI)

الكمية الأساسية	الطول	الكتلة	الزمن
الوحدة الأساسية	المتر (م)	الكيلو جرام (كجم)	الثانية (ث)

الكميات المشتقة :

الوحدة	السرعة (ع)	العجلة (ج)	القوة (ق)
العلاقة بالوحدة الأساسية	$\frac{ع}{ث} = \frac{م}{ث}$	$\frac{ج}{ث} = \frac{كجم}{ث}$	$ق = ك \times ج$
القياس	م/ث	م/ث ^٢	نيوتن

بعض التحويلات للكميات المشتقة :

$$١ \text{ كم/س} = \frac{١٠٠٠}{١٨} \text{ م/ث} ، ١ \text{ كم/س} = \frac{٢٥٠}{٩} \text{ سم/ث} ، \frac{١٨}{٥} \text{ م/ث} = \frac{١٨}{٥} \text{ كم/س} ، \frac{٩}{٢٥٠} \text{ سم/ث} = \frac{٩}{٢٥٠} \text{ كم/س}$$

$$\text{النيوتن} = ١٠^\circ \text{ دايين} ، \text{الداين} = ١٠^{-٥} \text{ نيوتن} ، ١ \text{ ث كجم} = ٩,٨ \text{ نيوتن} ، ١ \text{ ث جم} = ٩٨٠ \text{ دايين}.$$

الإستاتيكا: هى علم دراسة سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من القوى.

الجسم الجاسئ: هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية .

القوة: تعرف القوة بأنها تأثير أحد الأجسام على جسم آخر.

خواص القوة: يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

- ١- المقدار.
- ٢- الاتجاه.
- ٣- نقطة التأثير.

إذا كانت $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ قوتان يحصران بينهما زاوية قياسها $\vec{ع}$ وكانت محصلتهما $\vec{ع}$ وتميل على $\vec{ق}_١$ بزاوية قياسها $\vec{ع}$ فإن: $\vec{ع} = \sqrt{\vec{ق}_١^٢ + \vec{ق}_٢^٢ + ٢\vec{ق}_١\vec{ق}_٢\cos\vec{ع}}$
 ظاه = $\frac{\vec{ق}_١\cos\vec{ع} + \vec{ق}_٢\cos\vec{ع}}{\vec{ق}_١ + \vec{ق}_٢}$

أو باستخدام قاعدة الجيب: $\frac{\vec{ق}_١}{\sin\vec{ع}} = \frac{\vec{ق}_٢}{\sin\vec{ع}} = \frac{\vec{ع}}{\sin\vec{ع}}$

القيمة العظمى لمحصلة القوتين $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ وتعمل فى نفس اتجاهيهما.

القيمة الصغرى لمحصلة القوتين $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ وتعمل فى اتجاه القوة الكبرى.

إذا كانت $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ مركبتى القوة $\vec{ع}$ ، يصنعان مع $\vec{ع}$ زاويتين $\vec{ه}_١$ ، $\vec{ه}_٢$ على الترتيب فإن:

$$\frac{\vec{ق}_١}{\sin\vec{ه}_١} = \frac{\vec{ق}_٢}{\sin\vec{ه}_٢} = \frac{\vec{ع}}{\sin(\vec{ه}_١ + \vec{ه}_٢)}$$

إذا كانت $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ مركبتى القوة $\vec{ع}$ المتعامدتين والتى تميل فيها خط عمل $\vec{ع}$ مع خط عمل $\vec{ق}_١$ بزاوية قياسها $\vec{ع}$ فإن $\vec{ع} = \vec{ق}_١$ جتا $\vec{ه}$ ، $\vec{ق}_٢ = \vec{ع} \sin\vec{ه}$

مضلع القوى: إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية المتلاقية في نقطة تمثيلاً بأطوال أضلاع مضلع مأخوذة في ترتيب دورى واحد فإن مقدار محصلة هذه القوى تساوي طول الضلع الذى يقفل هذا المضلع فى الاتجاه الدورى المضاد.

إذا أثرت عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة (فى نظام إحداثى متعامد) وكان المجموع الجبرى لمركبات هذه القوى فى اتجاهين متعامدين هما س ، ص فإن: $\sqrt{s^2 + v^2} = R$ ، $\frac{v}{s} = \tan \theta$ حيث θ هى قياس زاوية ميل المحصلة مع س.

إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية تمثيلاً تاماً بأطوال مضلع قوى مقفل كانت هذه المجموعة متزنة.

تكون مجموعة القوى المستوية المتلاقية فى نقطة متزنة إذا كان:

١) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overline{OS}$ = صفر .

٢) والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overline{OS}$ = صفر.

اتزان جسم تحت تأثير قوتين: هو أن تكون القوتان: متساويتين فى المقدار ، متضادتين فى الاتجاه ، خطأ عملها على استقامة واحدة.

نقل نقطة تأثير القوة: إذا أثرت قوة على جسم جاسع فإنه يمكن نقل نقطة تأثيرها إلى أى موضع من الجسم على خط العمل دون أن يودى ذلك إلى تغيير تأثيرها على الجسم.

اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى: إذا أمكن تمثيل قوى متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

قاعدة مثلث القوى: إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل هذه القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

قاعدة لامي: إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرين.

إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية تمثيلاً تاماً بأطوال مضلع قوى مقفل كانت هذه المجموعة متزنة.

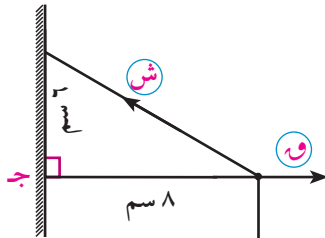


تمارين عامة (الوحدة الأولى)



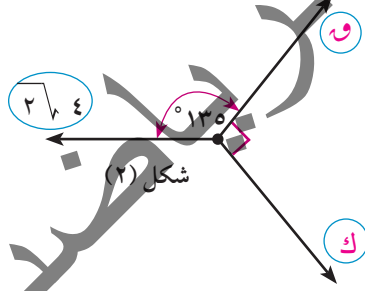
أكمل ما يأتي:

- ١ قوتان مقدارهما ٤ ، ق داين وقياس الزاوية بينهما $[0, \pi]$ ، محصلتها تنصف الزاوية بينهما فإن ق = ... داين.
- ٢ قوتان تؤثران في نقطة مادية مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أكبر قيمة للمحصلة = ... نيوتن ، أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.
- ٣ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن مركبة وزنه في اتجاه المستوى تساوى
- ٤ إذا اترزت القوة ق مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٦ ، ٨ ث كجم فإن مقدار القوة ق يساوى ث كجم.
- ٥ إذا كانت القوى $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ ، $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ متزنة فإن = ب ، = أ
- ٦ كل شكل مما يأتي مكون من ثلاث قوى متزنة ومتلاقية في نقطة. أكمل ما يأتي:



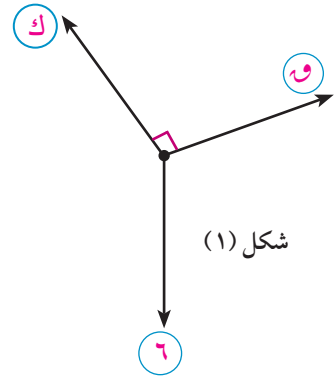
شكل (٣)

..... = ق
..... = ك



شكل (٢)

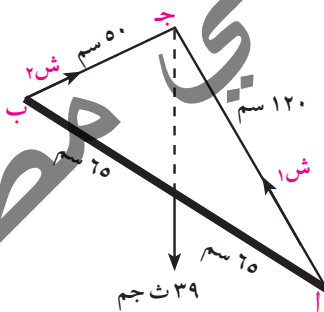
..... = ق
..... = ك



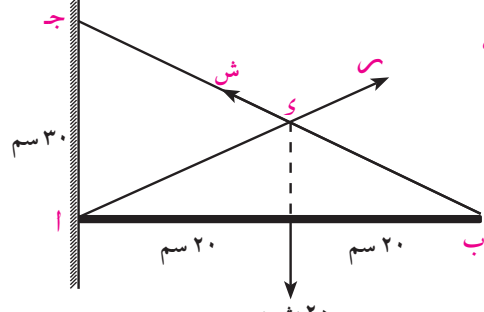
شكل (١)

..... = ق
..... = ك

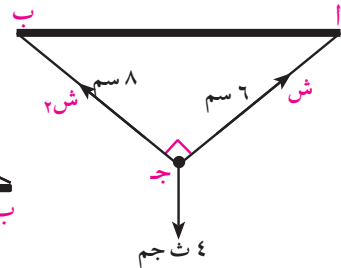
- ٧ أ ب قضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية كما هو موضح في كل شكل. أكمل:



أ = ش ١ ث جم.
ب = ش ٢ ث جم.



ب = ش ١ ث جم.
ه = س ٢ ث جم.

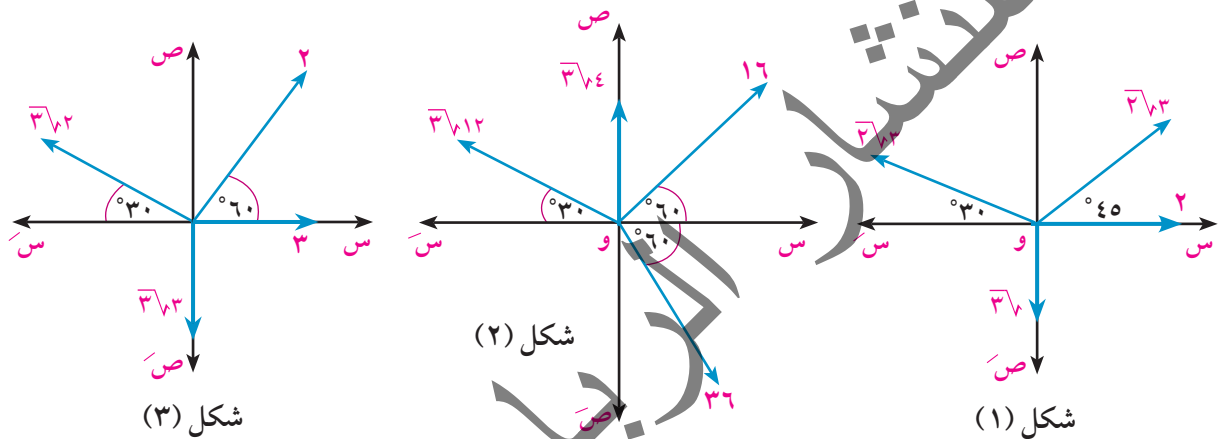


أ = ش ١ ث جم.
د = ش ٢ ث جم.

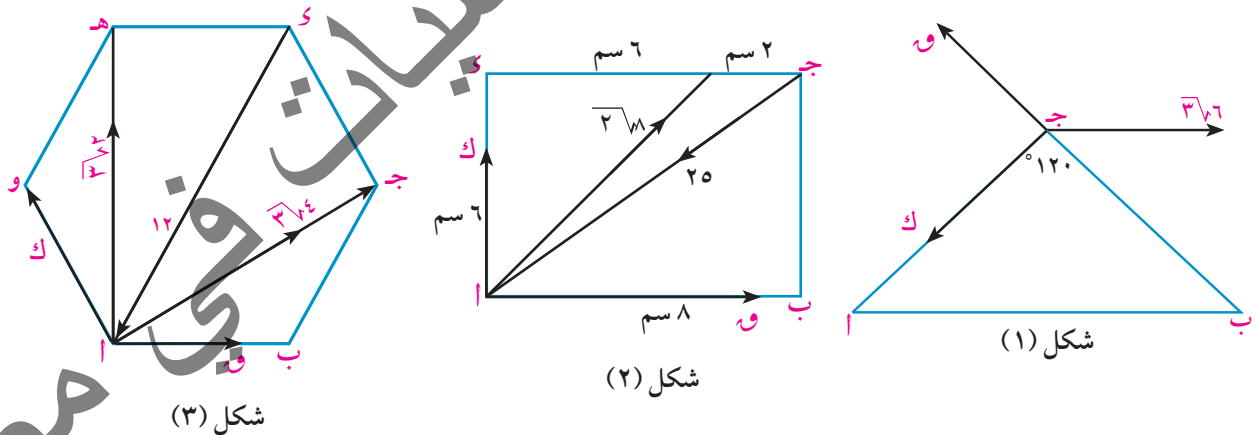
٨ إذا كانت $\vec{C}$ هي محصلة القوتين $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ اللذين يحصران بينهما زاوية قياسها γ وكان قياس زاوية ميل المحصلة على $\vec{C}_1$ يساوي θ فأوجد:

- مقدار $\vec{C}$ ، عندما $C_1 = 8$ نيوتن ، $C_2 = 15$ نيوتن ، $\gamma = 90^\circ$.
- مقدار $\vec{C}$ وقياس زاوية θ عندما $C_1 = C_2 = 60$ داین ، $\gamma = 60^\circ$.
- مقدار $\vec{C}$ وقياس زاوية θ عندما $C_1 = 6$ نيوتن ، $C_2 = 3$ نيوتن والمحصلة عمودية على $\vec{C}_2$.
- مقدار $\vec{C}$ وقياس زاوية θ إذا كان $C_1 = 3\sqrt{3}$ نيوتن ، $C_2 = 6$ نيوتن والمحصلة عمودية على $\vec{C}_1$.
- قيمة C_1 عندما $C = 12$ نيوتن ، $C_2 = 3\sqrt{12}$ نيوتن ، $\gamma = 150^\circ$.

٩ أوجد مقدار المحصلة وزاوية ميلها مع محور السينات في كل شكل من الأشكال الآتية:

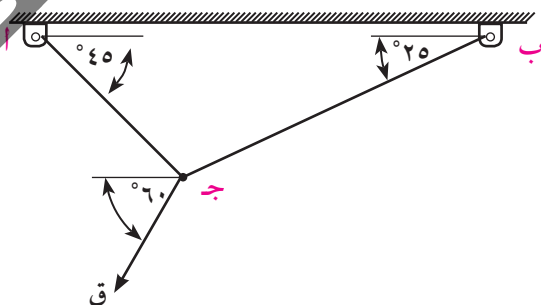


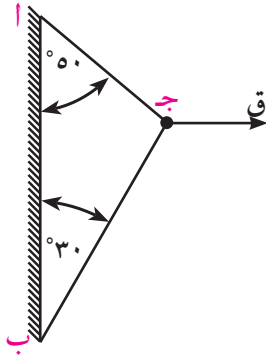
١٠ أوجد مقدار كل من C_1 ، C_2 بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتي متزنة.



١١ أثرت قوة $\vec{C}$ عند نقطة ج مقدارها ٥٠٠ نيوتن،

وتصنع مع الأفقى زاوية قياسها 60° وربط حبلان عند ج مثبتان عند أ ، ب ويصنعان مع الأفقى زاويتين قياسيهما 45° ، 25° على الترتيب . أوجد في وضع الاتزان الشد في أجزاء الخيطين لأقرب نيوتن .





١٢ أثرت قوة أفقية $\vec{Q}$ عند جـ مقدارها ٥٠٠ نيوتن من نقطة في جبل ثبت طرفاه عند النقطتين أ، ب من حائط رأسى، أوجد الشد في كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



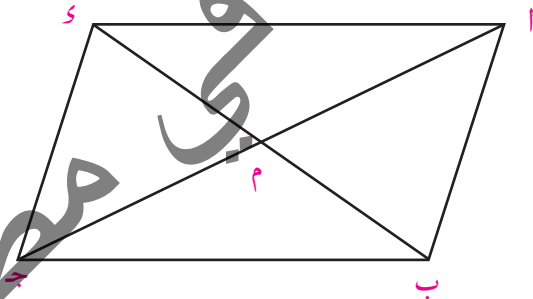
اختبار تراكمي



أسئلة ذات إجابات قصيرة:

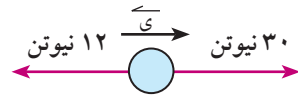
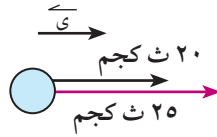
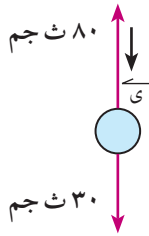
- ١ اكمل مايتى:
 - أ الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفاً تاماً معرفة
 - ب الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفاً تاماً معرفة
 - ج القطعة المستقيمة الموجهة هي قطعة مستقيمة لها ،
 - د تكافؤ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما
 - هـ الصورة القطبية للمتجه $\vec{m} = 3\vec{s} + 4\vec{v}$ هي
 - و المتجه الذى يعبر عن قوة مقدارها ٢٠ ث كجم فى اتجاه 30° جنوب الشرق يكتب على الصورة الإحداثية كالآتى

٢ فى الشكل المقابل: أ ب ج د متوازي أضلاع م نقطة تلاقى قطريه. أكمل:



- أ $\vec{AB} + \vec{BC} = \dots\dots\dots$
- ب $\vec{DA} + \vec{DC} = \dots\dots\dots$
- ج $\vec{AM} + \vec{CM} = \dots\dots\dots$
- د $\vec{AB} + 2\vec{BM} = \dots\dots\dots$
- هـ $\vec{AB} - \vec{AM} = \dots\dots\dots$

٢ اكتب بدلالة متجه الوحدة $\vec{u}$ محصلة القوى الموضحة بكل شكل:



٤ في كل مما يأتي القوتان $\vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2$ تؤثران في نقطة مادية ، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها .

أ $\vec{Q}_1 = 15$ نيوتن في اتجاه الشرق ، $\vec{Q}_2 = 40$ نيوتن في اتجاه الغرب .

ب $\vec{Q}_1 = 34$ ث جم في اتجاه الشمال الشرقي ، $\vec{Q}_2 = 34$ ث جم في اتجاه الجنوب الغربي .

ج $\vec{Q}_1 = 50$ دايـن تعمل في اتجاه غرب الشمال ، $\vec{Q}_2 = 50$ دايـن تعمل في اتجاه جنوب الشرق .

د $\vec{Q}_1 = 30$ نيوتن تعمل في اتجاه 20° شرق الشمال ، $\vec{Q}_2 = 30$ نيوتن تعمل في اتجاه 70° شمال الشرق .

٥ $\vec{Q}_1 = 7\vec{u} - 5\vec{v}$ ، $\vec{Q}_2 = 3\vec{u} + 4\vec{v}$ ، $\vec{Q}_3 = 4\vec{u} - 3\vec{v}$ تؤثر في نقطة مادية أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت:

أ محصلة مجموعة القوى تساوي $4\vec{u} - 7\vec{v}$ ب مجموعة القوى متزنة

أسئلة ذات إجابات طويلة

٦ قوتان مقدارهما $3\sqrt{8}$ ، ٨ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها 150° . أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التي تصنعها مع القوة الأولى .

٧ قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن . أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين .

٨ قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما 120° أوجد ق عندما:

أ مقدار المحصلة يساوي ق . ب اتجاه المحصلة عمودي على القوة الثانية .

ج المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين .

٩ حلّ قوة مقدارها ٦٠ إلى قوتين متساويتين في المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما 60° .

١٠ أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين ، لوزن جسم موضوع على مستوى أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا عُلِمَ أنَّ إحداهما تميل على الأفقي بزاوية قياسها 30° إلى أسفل .

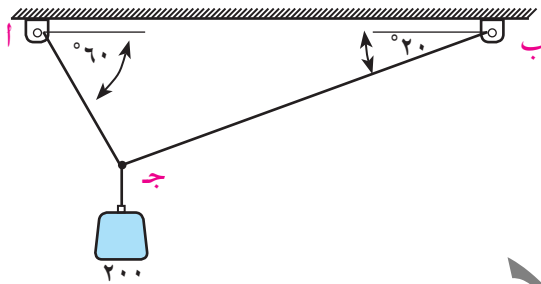
١١ ثلاث قوى مقاديرها ٢ق ، ٤ق ، ٦ق نيوتن تؤثر في نقطة مادية في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع مأخوذة في ترتيب دوري واحد ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة .

١٢) أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب ج = ٦ سم ، و $\angle ج د$ بحيث و $\angle د = ٦٠^\circ$ سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٣ ، ٣ نيوتن في أ ب ، ج أ ، أ و ، أ د على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

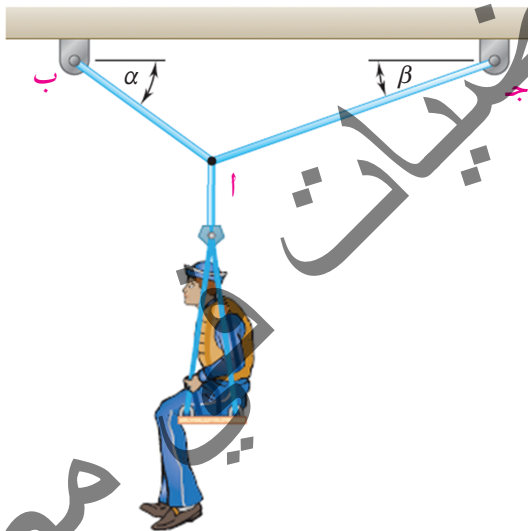
١٣) علق ثقل مقداره ٨٠ ث جم في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها 30° . أوجد في وضع الاتزان مقدار القوة، وكذلك الشد في الخيط.

١٤) وضع ثقل قدره ٢٠ ث كجم على مستو مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية θ ، حيث جتا $\theta = \frac{4}{5}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية مقدارها (ق) أوجد ق وكذلك رد فعل المستوى.

١٥) قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياسهما 60° ، 30° . أوجد قياس الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفقي في وضع الاتزان ، وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوي ٢٤ نيوتن. عين مقدار رد الفعل لكل من المستويين.



١٦) الشكل المقابل يبين ثقل مقداره ٢٠٠ نيوتن معلق رأسياً من نقطة جـ ومثبت بواسطة حبلين ب جـ ، أ جـ يصنعان مع الأفقي زاويتين قياسيهما 60° ، 30° فإذا كانت المجموعة متزنة ، أوجد الشد في كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



١٧) **الربط بالملاحة البحرية:** يجري إنقاذ بحار باستخدام كرسى القبطان وذلك بتعليقه في بكرة يمر عليها حبلان أ ب ، أ جـ كما في الشكل المجاور فإذا كان قياسا زاويتي α ، β مع الأفقي 25° ، 15° على الترتيب وكان الشد في الخيط أ ب يساوي ٨٠ نيوتن. فأوجد وزني البحار والكرسى معاً ، وكذلك الشد في الخيط أ جـ في وضع الاتزان.

إن لم تستطع الإجابة على هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول التالي :

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧
الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث
ارجع إلى	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث	الدرس (٤) ث

الوحدة الثانية

الديناميكا Dynamics

مقدمة الوحدة

يختص علم الديناميكا بدراسة حركة الأجسام والقوى المسببة لهذه الحركة حيث ينقسم إلى الكينماتيكا والكيناتيكا وسوف نقتصر في هذه الوحدة على دراسة الكينماتيكا kinematics ذلك العلم الذي يصف حركة الأجسام دون الأخذ في الاعتبار للقوى المؤثرة عليها، وجدير بالذكر أن الكينماتيكا لها أهميتها التطبيقية في حياتنا العملية مثل حساب خسوف الشمس وكسوف القمر قبل حدوثهما - إمكانية توجيه قذيفة إلى هدف ما بدقة كافية - تحديد مسار مركبة فضائية أو قمر صناعي وتحديد نقطة نزوله على الأرض- تصميم جميع الآلات الميكانيكية، ومن هنا سنتناول في هذه الوحدة دراسة حركة الأجسام والظواهر المصاحبة لهذه الحركة ومسبباتها.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة و تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- ✚ يتعرف مفهوم الجسم على أنه نقطة افتراضية.
- ✚ يتفهم المقصود بالحركة الانتقالية لجسيم من موضع لآخر.
- ✚ يدرك أن الحركة الانتقالية تحدث إذا كانت جميع نقاط الجسم تتحرك في خطوط موازية لبعضها في أثناء الحركة.
- ✚ يميز بين الإزاحة والمسافة.
- ✚ يتعرف مفهوم السرعة المنتظمة (متجه السرعة - الحركة المنتظمة - متجه السرعة المتوسطة - متجه السرعة اللحظية- السرعة النسبية - وحدات قياس السرعة).
- ✚ يميز بين مفهومى متجه السرعة المتوسطة (Average velocity)، ومقدار السرعة المتوسطة (Average speed) في حالة الحركة الخطية في اتجاه متجه ثابت.
- ✚ يطبق مفاهيم السرعة ، السرعة النسبية والعجلة في نمذجة مواقف فيزيائية وحياتية تشمل: (حركة الصواريخ - حركة الطيران - الأقمار الصناعية) في صورة أنشطة .
- ✚ يتعرف مفهوم السرعة النسبية.
- ✚ يتعرف الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة - وحدات قياس العجلة $a = \frac{v}{t}$ ، $v = at$ ، $s = \frac{1}{2}at^2$ ، $v^2 = 2as$
- ✚ يتعرف الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية.
- ✚ يتعرف تطبيقات على قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة.
- ✚ يتعرف قوانين الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية في حالة صعود الجسم أو هبوطه.
- ✚ يتعرف الجاذبية الأرضية (قانون نيوتن للجذب العام). ثابت الجذب العام.
- ✚ يتعرف التمثيل البياني لمنحنى الإزاحة مع الزمن ، منحنى السرعة مع الزمن.
- ✚ يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في تمثيل العلاقة بين الإزاحة مع الزمن والسرعة مع الزمن في صورة أنشطة.

المصطلحات الأساسية

Displacement	إزاحة	Rectilinear Motion	حركة مستقيمة
Uniform Velocity	سرعة منتظمة	Distance	مسافة
Instantaneous Velocity	سرعة لحظية	Vector Velocity	متجه سرعة
Position Vector	متجه موضع	Average Velocity	السرعة المتوسطة
Uniform Acceleration	عجلة منتظمة	Average Speed	مقدار السرعة المتوسطة
Free fall	سقوط حر	Relative Velocity	السرعة النسبية
Gravity	جاذبية أرضية	Vertical Motion	حركة رأسية
		Universal Gravitation	جذب عام

الأدوات والوسائل

Graphical programs	برامج رسومية للحاسوب	Scientific calculator	آلة حاسبة علمية
		Graphical calculator	آلة حاسبة رسومية

دروس الوحدة

- الدرس (١ - ٢): الحركة المستقيمة.
 الدرس (٢ - ٢): الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة.
 الدرس (٢ - ٣): الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية.
 الدرس (٢ - ٤): قانون الجذب العام لنيوتن.

مخطط تنظيمي للوحدة

الديناميكا



الحركة المستقيمة

Rectilinear motion

تقديم:

سبق أن تعرفت على بعض أنظمة القياس إلى أن تم اعتماد النظام العشري الذي ابتكره الفرنسيون عام ١٧٩٠م ، واستمر حتى جاء النظام العالمي الموحد SI وهو مشتق من الكلمة International System Of Units ويتشكل هذا النظام من الكميات الأساسية في علم الميكانيكا (الكتلة ، الطول ، الزمن) ، وكذلك من الوحدات المشتقة التي تتشكل كحاصل ضرب قوى الوحدات الأساسية وفقاً لبعض العلاقات الجبرية (كالسرعة ، العجلة ، القوة).

Motion

الحركة

السكون والحركة :

عندما يغير جسم ما موقعه بالنسبة لجسم آخر بمرور الزمن فإنه يقال إن الجسم الأول في حالة حركة بالنسبة للجسم الثاني، أما إذا كان موقع الجسمين النسبي لا يتغير بمرور الزمن فإن كلا منهما يكون في حالة سكون بالنسبة للآخر. فالسكون أو الحركة مفهومان نسبيان، فالأشجار والمنازل ساكنة ولكنها تبدو في حالة حركة بالنسبة لقطار يتحرك بسرعة ما.

Motion and its Types

الحركة وأنواعها

هناك أنواع عديدة للحركة كالحركة الانتقالية، والدورانية، والاهتزازية، فمثلاً: كرة القدم المقذوفة تنتقل من موضع إلى موضع آخر، وقد تدور حول نفسها فهي إذن تتحرك حركة انتقالية وأخرى دورانية في الوقت نفسه، بينما نجد أن قطرات الماء المتساقطة تتحرك حركة انتقالية وفي الوقت نفسه تكون في حالة حركة اهتزازية وسوف نقوم بدراسة الحركة الانتقالية بصورة منفردة، ويتم ذلك بافتراض حركة جسم متناهٍ في الصغر يسمى الجسم، ويعامل الجسم كنقطة هندسية من دون أبعاد تماشياً للتعقيدات النظرية الناتجة عن الحركة الدورانية أو الاهتزازية والتي سنسجلها في هذه الدراسة .



نقطة البداية



نقطة النهاية

سوف تتعلم

- العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة.
- السرعة المتوسطة.
- السرعة اللحظية.
- السرعة النسبية.

المصطلحات الأساسية

- حركة مستقيمة
- Rectilinear Motion
- نظام متركب
- IS
- متجه إزاحة
- Displacement Vector
- متجه موضع
- Position Vector
- متجه سرعة
- Velocity Vector
- حركة منتظمة.
- Uniform motion
- سرعة متوسطة
- Average Velocity
- سرعة لحظية
- Instantaneous Velocity
- السرعة النسبية
- Relative Velocity

الأدوات والوسائل

- ورق مربعات.
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

الحركة الانتقالية Translational Motion

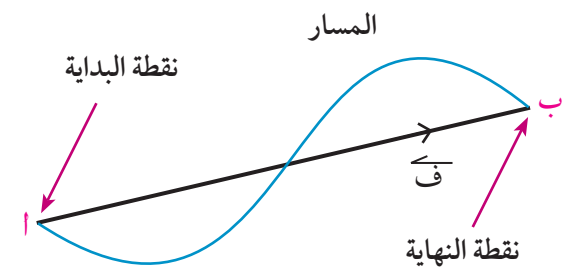
الحركة الانتقالية يتحرك فيها الجسم بين نقطتين، تسمى الأولى نقطة البداية والثانية نقطة النهاية ومن أمثلتها حركة جسم في خط مستقيم.

المسافة Distance

إذا تحرك قطار من مدينة القاهرة إلى مدينة المنصورة، فإنه سوف يقطع مسافة قدرها ١٢٦ كم، وتعتبر المسافة كمية قياسية إذ يجب معرفة مقدارها فقط، فإذا كان مقدار المسافة بين المدينتين ١٢٦ كم فإن الرقم ١٢٦ يمثل القيمة العددية، (كم) هي وحدة قياس المسافة.

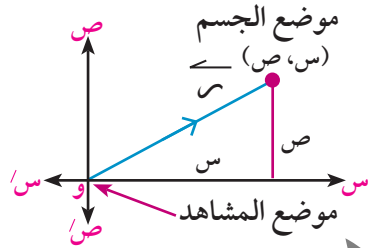
متجه الإزاحة Displacement vector

هو المتجه الذي تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{AB}$ التي نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\vec{AB}$ بالرمز $\vec{f}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $||\vec{AB}||$ وهو لا يساوى بالضرورة طول المسار الذي قطعه الجسم في أثناء الحركة.



متجه الموضع Position vector

هو المتجه الذي تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسم، ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ حيث $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ مع $\vec{r}_1$ متجه وحدة متعامدين.



العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة:

Relation between position vector and displacement vector

إذا كانت (و) هي موضع المشاهد، (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هما موضعا الجسم عند لحظتين متتاليتين فإن $\vec{AB}$ هو متجه الإزاحة للجسم وليكن $\vec{f}$.

فإذا رمزنا لمتجه الموضع عند اللحظة ن بالرمز $\vec{r}_n$ ، متجه الموضع عند

اللحظة (ن + هـ) بالرمز $\vec{r}_{n+h}$ فإن: $\vec{f} = \vec{r}_{n+h} - \vec{r}_n$.

$$\vec{f} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2$$

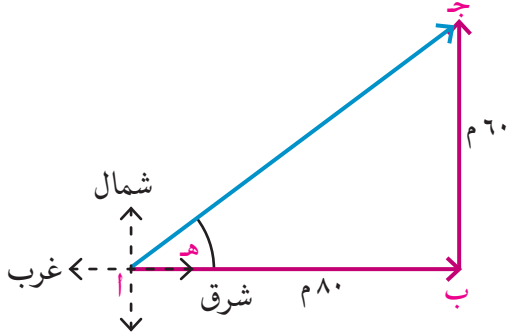
$$||\vec{f}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

∴ $\vec{f} = ||\vec{f}|| \vec{u}$ ، $\vec{u}$ متجه وحدة في اتجاه $\vec{f}$ (اتجاه الحركة)

مثال

١) تحرك عداء ٨٠ متراً شرقاً، ثم تحرك بعد ذلك ٦٠ متراً شمالاً. احسب المسافة والإزاحة التي قطعها العداء. ماذا تلاحظ؟

الحل



المسافة الكلية التي قطعها العداء هو مجموع المسافتين من أ إلى ب ثم من ب إلى ج.

المسافة = أ ب + ب ج = ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠ م
الإزاحة ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة أ ج من فيثاغورث:

$$أ ج = \sqrt{(٨٠)^2 + (٦٠)^2} = \sqrt{١٠٠٠٠} = ١٠٠ \text{ م} ، \text{ طاه} = \frac{٦٠}{٨٠} = ٠.٧٥ \text{ ومنها } ٣٦^\circ ٥٢' ١٢''$$

أى أن مقدار الإزاحة = ١٠٠ م وتعمل فى اتجاه ٣٦° ٥٢' ١٢'' شمال الشرق.

نلاحظ أن:

- المسافة المقطوعة كمية قياسية (تحدد بمعلومية مقدارها فقط) بينما الإزاحة كمية متجهة (تحدد بمعلومية المقدار والاتجاه).
- معيار متجه الإزاحة $\geq$ المسافة المقطوعة.

٢) حاول أن تحل

- ١) تحرك راكب دراجة ٦ كم غرباً، ثم تحرك بعد ذلك ٨ كم بزاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب، احسب المسافة والإزاحة التي قطعها راكب الدراجة
- ٢) تفكير ناقد: عندما تصعد نملة جداراً ارتفاعه ٣ أمتار، ثم تعود إلى نفس نقطة البداية، أوجد المسافة المقطوعة والإزاحة المقطوعة.

مثال

٢) يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\vec{r}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ بالعلاقة: $\vec{r}(n) = (٣ن + ٢) \vec{e}_1 + (٤ن - ١) \vec{e}_2$ أوجد معيار متجه الإزاحة حتى اللحظة $n = ٤$

الحل

$$\vec{r}(٠) = ٢ \vec{e}_1 - \vec{e}_2 ، \vec{r}(٤) = (٣ \times ٤ + ٢) \vec{e}_1 + (٤ \times ٤ - ١) \vec{e}_2 = ١٤ \vec{e}_1 + ١٥ \vec{e}_2$$

$$\therefore \vec{f} = \vec{r}(٤) - \vec{r}(٠)$$

$$= (١٤ - ٢) \vec{e}_1 + (١٥ + ١) \vec{e}_2 = ١٢ \vec{e}_1 + ١٦ \vec{e}_2$$

$$، \quad || \vec{f} || = \sqrt{١٤٤ + ٢٥٦} ، \quad \text{ف} = ٢٠ \text{ وحدة طول}$$

٤ حاول أن تحل

٢ في المثال السابق : أوجد معيار متجه الإزاحة من $n = 1$ إلى $n = 3$.

نشاط

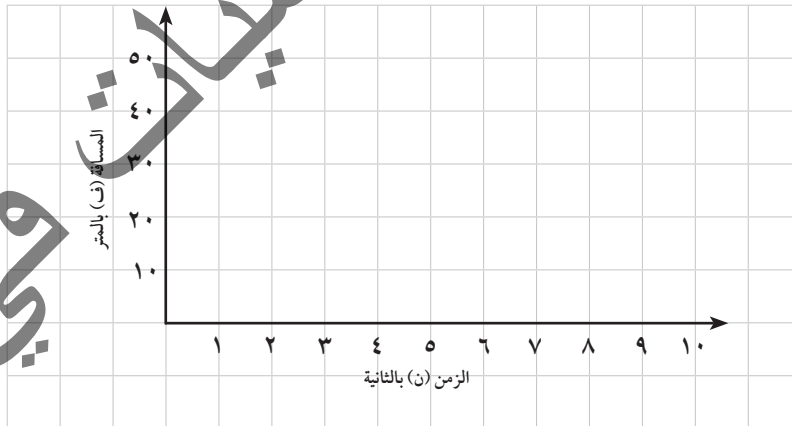


منحنى (المسافة - الزمن):

الجدول التالي يبين العلاقة بين الزمن بالثواني والمسافة بالأمتار لعداء

الزمن بالثانية	صفر	٢	٤	٦	٨	١٠
المسافة بالمتر	صفر	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠

- ١ في ورقة الرسم البياني جدد الزمن على محور السينات والمسافة على محور الصادات .
- ٢ مَثِّلْ بيانياً مواقع إحداثيات النقاط المبينة في الجدول.
- ٣ استخدم المسطرة في رسم أفضل خط مستقيم يمر بأغلب النقاط الموقعة في الرسم.
- ٤ باستخدام الخط البياني الذي يبين العلاقة بين المسافة والزمن في الأزمنة المبينة بالجدول، هل يمكنك إيجاد كل من :
 - أ المسافة التي يقطعها العداء بعد مضي ٣ ثوان؟
 - ب الزمن الذي يستغرقه العداء في قطع مسافة ٤٥ متراً؟
- ٥ هل يمكنك إيجاد ميل الخط البياني المبين لنوع حركة العداء؟ وضح ذلك.



Speed

السرعة

إذا تسابق عداءان في فترة زمنية محددة فإن العداء الذي يقطع مسافة أطول يكون أسرع من العداء الذي يقطع مسافة أقل، ويمكن قياس السرعة بالمسافة المقطوعة خلال فترة زمنية محددة دون تحديد اتجاه حركتها ؛ فالعداد الموجود أمام سائق السيارة يحدد مقدار سرعة السيارة فقط دون تحديد اتجاه مسار هذه السيارة .

تذكر أن

$$١ \text{ كم} / \text{س} = \frac{١٠٠٠}{٣٦٠٠} \text{ م} / \text{ث}$$

$$١ \text{ م} / \text{ث} = \frac{٣٦٠٠}{١٠٠٠} \text{ كم} / \text{س}$$

٤ حاول أن تحل

ب) حول ١٥ م / ث إلى كم / س

٤) أ) حول ٩٠ كم / س إلى م / ث

٥) أكمل الجدول الآتي:

١٨ × ٥	١٨ كم / س ٥ م / ث	٥٤ كم / س ٣ م / ث	٢٠ م / ث ٤ كم / س	٩٠ كم / س ٣ م / ث	٣٠ م / ث ٣ كم / س	١٨٠ كم / س ٣ م / ث	١٨ × ٥
-----------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	-----------

Velocity vector

متجه السرعة

متجه سرعة جسم هو المتجه الذي معياره يساوي قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

تعبير شفهي:

١- قارن بين السرعة ، متجه السرعة من حيث :

أ) التعريف. ب) نوع الكمية (قياسية أو متجهة) .

Uniform Volocity and variable Velocity

السرعة المنتظمة: والسرعة المتغيرة

الحركة المنتظمة: هي الحالة التي يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتاً وهنا نورد ملاحظتين هامتين على الحركة المنتظمة.

١- ثبات اتجاه متجه السرعة : وهذا يعنى ان الجسم يتحرك في اتجاه ثابت.

٢- ثبات معيار متجه السرعة : وهذا يعنى ان الجسم يقطع في اتجاه حركته مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

الحركة المتغيرة: إذا لم تكن الحركة منتظمة فإننا نسميها متغيرة. والحركة المتغيرة يتغير فيها متجه سرعة الجسم في المقدار أو الاتجاه أو كليهما من لحظة إلى أخرى.

average speed

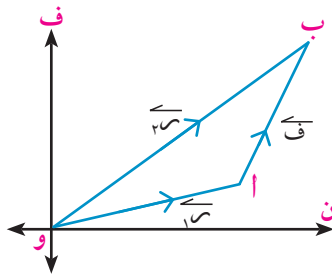
السرعة المتوسطة

إذا قامت سيارة برحلة من مدينة القاهرة إلى مدينة الغردقة فإن المسافة بين المدينتين طبقاً لمسار السيارة يبلغ ٥١٠ كم، فإذا كانت السيارة تتحرك بسرعات متفاوتة بين المدينتين، وكان الزمن الكلي لتلك الرحلة ٦ ساعات فإنه لحساب السرعة المتوسطة للسيارة خلال هذه الرحلة نجد أن:

$$\text{السرعة المتوسطة ع م} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٥١٠}{٦} = ٨٥ \text{ كم / س}$$

وعليه فإن :

السرعة المتوسطة هي المسافة الكلية المقطوعة خلال الرحلة ، مقسوماً على الزمن الكلي الذي استغرقته الرحلة.

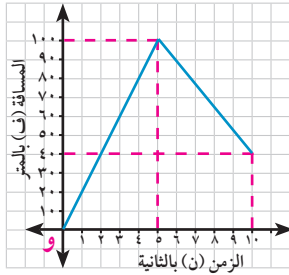


متجه السرعة المتوسطة Vector of the average velocity

إذا تحرك جسيم وتواجد عند لحظتين زمنيتين t_1 ، t_2 عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\vec{v}$ هو متجه الإزاحة في الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ فإن $\vec{v}_m$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية ويكون:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{v}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

مثال



٣ يبين الشكل المقابل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة راكب دراجة ، في

خط مستقيم من نقطة (و) أوجد:

أ متجه السرعة المتوسطة. ب السرعة المتوسطة.

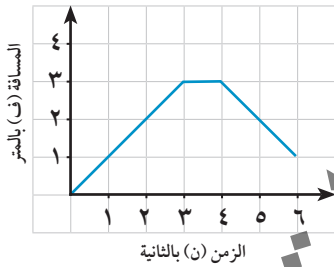
الحل

نوجد متجه السرعة المتوسطة باستخدام نقطتين على الخط البياني.

أ $\vec{v}_m = \frac{40 \text{ م}}{10 \text{ ث}} = 4 \text{ م/ث}$ ومعيها $\vec{v}_m = 4 \text{ م/ث}$

ب $\vec{v}_m = \frac{100 + 50}{10} = 15 \text{ م/ث}$

٤ حاول أن تحل



٦ يبين الشكل التالي رسمًا بيانيًا لمنحنى (المسافة - الزمن) لفأر يهرب من قط.

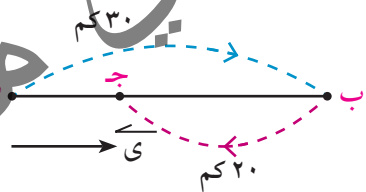
أعد رسم هذا الشكل إذا هرب الفأر من القط بضعف سرعته.

مثال

حساب السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة

٤ قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٨ كم / س، ثم عاد على نفس الطريق فقطع ٢٠ كم في الاتجاه المضاد بسرعة ١٥ كم / س أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها، ثم أوجد سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

الحل



إذا بدأ راكب الدراجة الحركة من الموضع أ إلى الموضع ب في المرحلة الأولى، ثم عاد من ب إلى ج في المرحلة الثانية وبفرض أن $\vec{v}$ هو متجه الوحدة في اتجاه أ ب .

زمن المرحلة الأولى = $\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ أي $t_1 = \frac{5}{3}$ ساعة،

زمن المرحلة الثانية $t_2 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ ساعة.

الزمن الكلي للرحلة = $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$ ساعات

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 10 - 30 = -20 \text{ كم/س}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{\vec{v}_1}{n} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ كم/س}$$

أي أن متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\vec{v}$ أى فى اتجاه $\vec{v}$ ومعياره يساوى $3\frac{1}{3}$ كم/س.

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{20 + 30}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ كم/س}$$

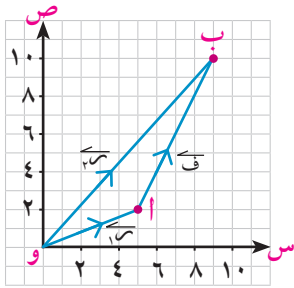
حاول أن تحل

٧ قطع راكب دراجة مسافة ٢٥ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم/س، ثم قطع مسافة ٧ كم فى نفس الاتجاه بسرعة ٧ كم/س. أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها، سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

مثال

٥ تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٧ ثوان عند الموضعين أ (٥، ٢)، ب (٩، ١٠) على الترتيب، أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

الحل



الشكل المقابل يمثل:

متجه الموضع الابتدائي و $\vec{r}_1$ ،

متجه الموضع النهائي و $\vec{r}_2$ ،

متجه الإزاحة $\vec{AB}$ ($\vec{v}$)

$$\text{حيث: } \vec{v} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{v} = (9, 10) - (2, 5)$$

$$\vec{v} = (7, 5)$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{\vec{v}}{n_2 - n_1}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{(7, 5)}{(3 - 2)} = (7, 5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ (الصورة المتجهة للسرعة المتوسطة)}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74} \approx 8.6 \text{ وحدة سرعة}$$

وتصنع زاوية قطبية مع $\vec{v}_1$ ظلها ٢ أى $63^\circ 26'$.

حاول أن تحل

٨ تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ (٧، ٢)، ب (٤، ٦) على الترتيب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة.

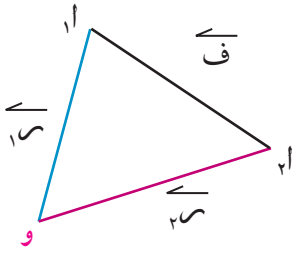
Instantaneous Velocity

متجه السرعة اللحظية

في الشكل المقابل

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}}{t} = \vec{v}$$

وإذا كانت الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ صغيرة جدًا تتوسطها اللحظة t فإن متجه السرعة في هذه الحالة يعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة t ويرمز لها بالرمز $\vec{v}$



فكر و ناقش



Relative velocity

السرعة النسبية

ماذا تلاحظ؟

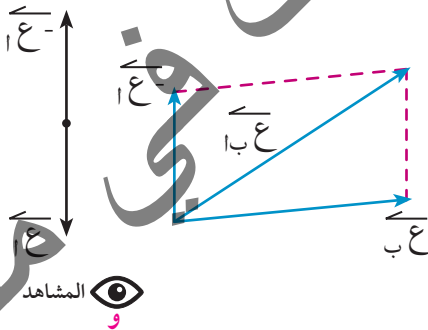
- إذا جلست في قطار يتحرك وأنت تشاهد من النافذة أعمدة الإنارة والأشجار على جانب الطريق.
- إذا ركبت سيارة تتحرك بسرعة في اتجاه ما، وأنت تشاهد السيارات الأخرى التي تتحرك في نفس اتجاه سيارتك.
- إذا كانت السيارات الأخرى تتحرك عكس اتجاه سيارتك.

نلاحظ مما سبق أن الحركة مفهوم نسبي يختلف من مشاهد لآخر في موضع آخر، وفي جميع الحالات فإن المشاهد يرصد حركات الأجسام الأخرى باعتباره ساكنًا حتى ولو كان غير ذلك، فيرى هذه الأجسام تتحرك بسرعات ليست هي السرعات الفعلية لها، ولكنها سرعات نسبية.

مفهوم السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هي السرعة التي يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) في حالة سكون.

متجه السرعة النسبية:



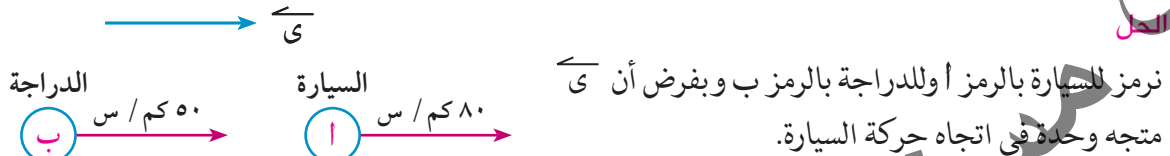
باعتبار أن $\vec{v}_A$ ، $\vec{v}_B$ هما متجهتا سرعة لجسمين أ، ب بالنسبة للمشاهد (و) وأن $\vec{v}_{AB}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ. إضافة $(-\vec{v}_A)$ إلى كل من المتجهين $\vec{v}_A$ ، $\vec{v}_B$ للجسمين أ، ب حيث يصبح أ ساكنًا ويصبح متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ هي

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \text{ أي أن: } \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

تفكير ناقد: إذا كان $\vec{v}_B$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ، $\vec{v}_A$ متجه سرعة أ بالنسبة إلى سرعة ب فاكتمب العلاقة بين $\vec{v}_B$ ، $\vec{v}_A$

مثال

- ٦ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س. فإذا تحركت في نفس اللحظة على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠ كم/س. أوجد السرعة النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما تكون:
- أ الدراجة تتحرك في نفس اتجاه حركة السيارة.
- ب الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.



أ عندما تتحرك الدراجة في نفس اتجاه حركة السيارة تكون:

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 50 - 80 = -30 \text{ كم/س}$$

$$\therefore \vec{v}_{2/1} = -30 \text{ كم/س} = 30 \text{ كم/س} \text{ عكس اتجاه } \vec{Y}$$

أي أن الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة مبتعدة عن السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم/س في عكس اتجاه $\vec{Y}$.

ب عندما تتحرك الدراجة في عكس اتجاه السيارة:



أي أن الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه بسرعة ١٣٠ كم/س.

٩ حاول أن تحل

- ٩ تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٢ كم/س. فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٢٨ كم/س. فأوجد السرعة النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما:
- أ الدراجة تتحرك في نفس اتجاه حركة السيارة.
- ب الدراجة تتحرك في عكس اتجاه حركة السيارة.

مثال

- ٧ تتحرك باخرة في مسار مستقيم نحو ميناء، ولما صارت على مسافة ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة في الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم/س، ورصدت حركة الباخرة، فبدت لها متحركة بسرعة ٣٠٠ كم/س، احسب الزمن الذي يمضي من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل

الطائرة
٢٥٠ كم / س
١

ي
الباخرة
ع ب
ب

نرمز للباخرة بالرمز ب وللطائرة بالرمز أ ونفرض أن
ي متجه وحدة له نفس اتجاه حركة الطائرة.
وأن السرعة الفعلية للباخرة ع ب (في اتجاه مضاد
لحركة الطائرة).

$$١. \quad \overrightarrow{ع ب} = ٢٥٠ \text{ ي} , \quad \overrightarrow{ع ب} = -٣٠٠ \text{ ي}$$

$$\therefore \overrightarrow{ع ب} = \overrightarrow{ع أ} - \overrightarrow{ب أ} \quad \therefore -٣٠٠ \text{ ي} = \overrightarrow{ع أ} - ٢٥٠ \text{ ي}$$

$$\text{أي أن } \overrightarrow{ع أ} = -٥٠ \text{ ي}$$

أي أن السرعة الفعلية للباخرة مقدارها ٥٠ كم / س وتعمل في الاتجاه المضاد لحركة الطائرة.

$$\therefore \overrightarrow{ف ع} = \overrightarrow{ف ن} \quad \therefore ١٠٠ = ٥٠$$

$$\text{أي أن } \overrightarrow{ف ن} = ٢ \text{ ساعة}$$

٩ حاول أن تحل

١٠ تتحرك سيارة رادار لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوي بسرعة ٤٠ كم / س، راقبت هذه السيارة حركة
سيارة نقل قادمة في الاتجاه المضاد، فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠ كم / س فما هي السرعة الفعلية لسيارة
النقل؟

تمارين (٢ - ١)

أكمل ما يأتي:

٢ ٩٠ كم / س = ... م / ث

١ ٢٠ م / ث = ... كم / س

٣ تتحرك سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٢ كم / س لمدة ربع ساعة فإن المسافة المقطوعة = ... كم.

٤ إذا كان $\overrightarrow{ع أ} = ١٥ \text{ سم}$ ، $\overrightarrow{ع ب} = ٢٢ \text{ سم}$ فإن $\overrightarrow{ع ب} = \text{.....}$

٥ إذا كان $\overrightarrow{ع ب} = ٦٥ \text{ ي}$ ، $\overrightarrow{ع أ} = ٥٠ \text{ ي}$ فإن $\overrightarrow{ع ب} = \text{.....}$

٦ يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ويتحرك في نفس الاتجاه راكب آخر ب
بسرعة ١٢ كم / س فإن سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوى كم / س.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٧ إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم / س لمدة ٢٠ دقيقة فإن المسافة المقطوعة ب كم تساوى:

٥ ٣٠

ج ٢٥

ب ٢٠

أ ١٥

٨ الزمن بالساعة الذي تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة منتظمة ٢٠ متر / ث في قطع مسافة ١٨٠ كم يساوى:

أ ١ ١/٢ ب ٢ ج ٢ ١/٢ د ٣

٩ إذا كان ع_أ = ١٥ س، ع_ب = ٣٥ س فإن ع_ب تساوى:

أ ٥٠ س ب ٢٠ س ج ٢٠ س د ٥٠ س

١٠ إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة فى الزمن ن (ثانية) بالعلاقة:

$s = (3 + 2t) \text{ م}$ فإن معيار متجه الإزاحة ف بعد ٢ ثانية حيث معيار س بالمتري يساوى:

أ ٤ متر ب ٦ متر ج ٨ متر د ١١ متر

١١ **الربط بالفلك:** إذا كان الضوء يصل من الشمس إلى الأرض فى ٨,٣ دقيقة، وكان بعد الأرض عن الشمس ١,٤٩٤ × ١٠^٨ متر فأوجد سرعة الضوء.

١٢ تحركت سيارتان فى وقت واحد من بنها متجهتان إلى القاهرة بسرعة ثابتة لكل منهما، فإذا كانت سرعة الأولى ٧٠ كم/س، وسرعة الثانية ٨٤ كم/س. ما الزمن الذى سينتظره قائد السيارة الثانية حتى يلحق به قائد السيارة الأولى فى نهاية الرحلة التى يبلغ طولها ٤٩ كم؟



١٣ دخل قطار طوله ١٥٠ مترًا نفقًا مستقيمًا طوله ١٠٠ متر، فاستغرق عبوره بالكامل من النفق فى زمن قدره ١٥ ثانية، أوجد طول النفق إذا كانت سرعة القطار منتظمة وتساوى ٩٠ كم / س.

١٤ قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ثم عاد فقطع ١٠ كم فى الاتجاه المعاكس بسرعة ١٠ كم / س، أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

١٥ سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم / س، وقطع مسافة مساوية لها فى نفس الاتجاه بسرعة ٤,٥ كم / س، أوجد السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

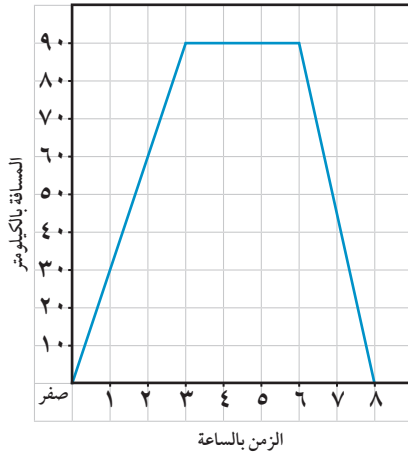
١٦ مدينتان أ، ب على الطريق الساحلى المسافة بينهما ١٢٠ كم، تحركت سيارة من المدينة أ متجهة إلى المدينة ب بسرعة منتظمة ٨٨ كم / س، وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى المدينة أ بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س أوجد متى وأين تتقابل السيارتان؟

١٧ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة منتظمة ٦٠ كم / س وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة منتظمة ٩٠ كم / س. أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب إذا كانت:

أ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين. ب السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد.

١٨ قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفى نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم / س، ولما زادت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف، وأعادت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة. أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.

نشاط (١)



١٩ يمثل الشكل المقابل العلاقة بين المسافة بالكيلو متر والزمن

بالساعة لمسار دراجة بخارية تتحرك بين مدينتين. أجب عما يلي :

أ أوجد السرعة المتوسطة للدراجة في أثناء الذهاب؟

ب أوجد السرعة المتوسطة للدراجة في أثناء العودة؟

ج ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل؟

٢٠ تحركت دراجة بخارية بسرعة منتظمة فوجد أنها بعد دقيقة

واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة أ، وبعد ٣ دقائق

أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة. ارسم شكلاً بيانياً يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لهذه الدراجة ومن

الرسم:

أ أوجد سرعة الدراجة.

ب اكتب العلاقة الرياضية بين الزمن (ن) والمسافة (ف).

نشاط (٢)



٢١ يوضح الشكل المقابل مسار حركة كل من أحمد وعمرو في

قطع المسافة بين قريتين، أحدهما في القرية الأولى، والآخر في القرية الثانية.

أ هل بدأ أحمد وعمرو الحركة في توقيت واحد؟ فسر إجابتك.

ب بعد كم دقيقة التقى أحمد وعمرو؟

ج ما الزمن الذي استغرقه أحمد في قطع المسافة؟

د أوجد سرعة عمرو.

ه إذا بدأ عمرو التحرك الساعة ٣٠ ق: ٩ صباحاً فمتى يصل إلى القرية الأخرى؟

٢٢ إذا كان متجه موضع جسيم $\vec{r}$ يتحرك في خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة في الزمن ن بالعلاقة:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2) \quad \text{حيث } \vec{r}_0 \text{ متجه وحدة ثابت. أوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوانٍ.}$$

٢٣ تواجدا جسيم عند لحظتين زمنيتين مقدارهما ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ (٤، ٣)، ب (١٢، ٩) على الترتيب.

أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

٢٤ **تفكير إبداعي:** يتحرك رجل على كوبرى أ ب، وعندما قطع $\frac{3}{8}$ طول الكوبرى من جهة أ سمع صوت صفير

قطار يتحرك خلفه بسرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س نحو نقطة أفذا تحرك الرجل نحو القطار فإن القطار

سيصدمه عند نقطة مباشرة أوجد أقل سرعة منتظمة يتحرك بها الرجل قبل أن يصدمه القطار مباشرة عند نقطة

ب.

الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم

Rectilinear motion with Uniform accelerated

تمهيد:

سبق أن درست الحركة المنتظمة في خط مستقيم، ومن الملاحظ أن عددًا قليلًا من الأجسام يتحرك بهذه الطريقة لوقت طويل، فمن الملاحظ أن كل سيارة يوجد بها ثلاث أدوات تتحكم في سرعتها، وهي دواسة الوقود ودواسة الفرامل، ثم عجلة القيادة التي تتحكم في اتجاه حركتها، كذلك نلاحظ التغير في سرعة الأجسام في أثناء سقوطها وفي أثناء قذفها إلى أعلى.

تعلم

الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم (Rectilinear motion - non variable motion):

هي الحركة التي يحدث فيها تغير مقدار السرعة بانتظام بمرور الزمن، ويسمى بالتسارع (العجلة) حيث:

$$\text{العجلة (ج)} = \frac{\text{السرعة النهائية} - \text{السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$$

وحدات قياسه = م / ث^٢ أو سم / ث^٢ أو كم / س^٢

كما يلاحظ أن:

إذا كان التغير في السرعة عند لحظة زمنية محددة فيسمى التسارع اللحظي.

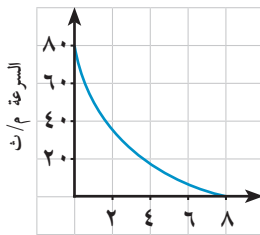
Velocity-Time curve

منحنى (السرعة - الزمن)

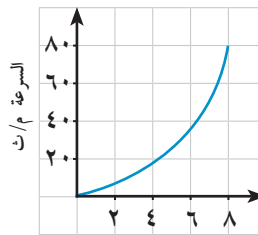
يرتبط مفهوم التسارع بتغير السرعة فإذا ازدادت قيمة السرعة مع الزمن نقول: إن الحركة متسارعة، ويكون التسارع (العجلة) موجبًا (باعتبار السرعة موجبة) كما في شكل (١).

وإذا تناقص مقدار السرعة مع الزمن فنقول: إن الحركة تقصيرية، ويكون التسارع (العجلة) سالبًا كما في شكل (٢).

وإذا بقيت السرعة ثابتة مع الزمن نقول: إن الحركة منتظمة.



شكل (٢)



شكل (١)

سوف نتعلم

- التسارع.
- منحنى السرعة - الزمن.
- الحركة منتظمة التغير.
- العلاقة بين السرعة - الزمن.
- العلاقة بين المسافة - الزمن.
- العلاقة بين السرعة - المسافة.

المصطلحات الأساسية

- تسارع Acceleration
- حركة منتظمة التغير
- Uniform variable motion
- عجلة منتظمة
- Uniform acceleration
- تقصير منتظم
- Uniform deceleration

الأدوات والوسائل

- ورق مربعات
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

Uniformly accelerated motion

الحركة منتظمة التغير:

يقال إن الجسم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتاً مقداراً واتجهاً لجميع الأزمنة.

تعبير شفهي: ماذا تعني كل من العبارات الآتية:

- أ) مقدار سرعة جسم يزداد في أثناء حركته زيادة منتظمة بمعدل ٤ م / ث^٢.
 ب) مقدار سرعة جسم يتناقص في أثناء حركته تناقص منتظم بمعدل ٢٤ كم / س^٢.

مثال

١) إذا تغيرت بانتظام سرعة سيارة تتحرك في خط مستقيم من ٥٠ كم / س إلى ٦٨ كم / س خلال عشر ثوان، وتحركت سيارة نقل من السكون؛ حتى أصبحت سرعتها ١٨ كم / س خلال هذه المدة. أيهما يتحرك بتسارع أكبر؟ فسر إجابتك.

الحل

يتضح من بيانات المسألة أن كلا من السيارة، سيارة النقل قد حدث لهما زيادة في السرعة بمقدار ١٨ كم / س (أي ٥ م / ث) خلال فترة زمنية قدرها ١٠ ثوان؛ لذلك يكون التسارع متساوياً لكل منهما.
أي أن التسارع الذي تتحرك به كل منهما هو:

$$\therefore \text{ج} = \frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{الفترة الزمنية}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} \text{ م / ث}^٢$$

٢) حاول أن تحل

١) إذا تغيرت بانتظام سرعة سيارة (أ) تتحرك في خط مستقيم من ٢٤ كم / س إلى ٣٦ كم / س خلال ٥ ثوان، وتغيرت بانتظام سرعة سيارة (ب) تتحرك في نفس الخط المستقيم من ١٢ كم / س إلى ٣٠ كم / س خلال نفس المدة الزمنية. أيهما يتحرك بتسارع أكبر؟ فسر إجابتك.

معادلات الحركة منتظمة التغير في خط مستقيم Equations of the uniform variable motion

توجد ثلاث معادلات أساسية تربط بين القياسات الجبرية لمتجهات الازاحة، والسرعة، والعجلة، والزمن في حالة الحركة بتسارع منتظم وهي:

أولاً: العلاقة بين السرعة والزمن:

إذا تحرك جسم في خط مستقيم بمتجه سرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ ومتجه عجلة ثابتة $\vec{a}$ وأصبح متجه سرعته $\vec{v}$ بعد فترة زمنية (ن) فإن:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad \text{أي أن:} \quad \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a} \cdot t$$

بأخذ القياس الجبري تكون: $v = v_0 + at$

لاحظ أن:

◀ العلاقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداها بمعلومية الثلاثة الآخرين.

◀ إذا بدأ الجسم حركته من سكون فإن ع. = ٠ وتكون ع = جـ ن

◀ إذا كان ج = ٠ فإن ع = ع. أى أن الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

مثال

٢) بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٩سم / ث وبعجلة منتظمة قدرها ٣سم / ث^٢ تعمل في نفس اتجاه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعة الجسيم بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

ب) الزمن الذي يمضي من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ٥٤ سم / ث.

الحل 

أ نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسم.

من بيانات المسألة: ع. = ٩سم / ث، ج. = ٣سم / ث^٢، ن = ٥ ثوان.

∴ $6 = 6 + 0$ ∴ $9 + 3 \times 0 = 6$ ∴ $6 = 24 \text{ سم} / \text{ث.}$

ب) $٤٠ = ٤٠ + ٠$ جن $\therefore ٥٤ = ٩ + ٣$ ن $\therefore ١٥ = ١٥$ ثانية.

حاول أن تحل

٢) بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٢٠سم / ث وبعجلة منتظمة ٥سم / ث^٢ تعمل في نفس اتجاه متجه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعته في نهاية دقيقة واحدة من بدء الحركة.

ب) الزمن الذي يمضي من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ١٨ كم / س.

مثال 

٣ يتحرك جسيم في خط مستقيم فتغيرت سرعته من ٥٤ كم / س الى ٣ م / ث في زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة. هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًّا؟ فسّر إجابتك.

الحل 

لتحويل سرعة الجسم من كم/س إلى م/ث: ٥٤ كم / س = $\frac{٥}{١٨} \times ٥٤ = ١٥$ م / ث

من بيانات المسألة "ع. = ١٥ م / ث، ع = ٣ م / ث، ن = ٣٠ ثانية.

ج: $۶ = ۶ + ۰$ ج: $۳ = ۳ + ۰$

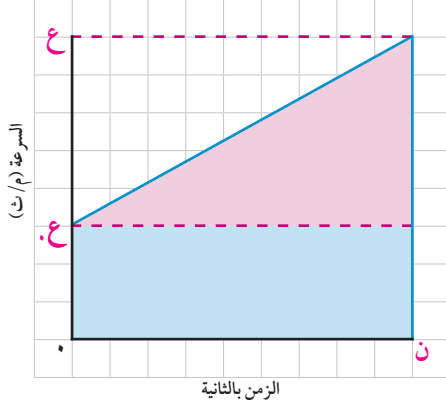
یٰٓ اَنّٰ: ۳۰ ج = ۱۲ ج = ۴, ۰ م / ث ۲

ج. > . يمكن لهذا الجسم أن يسكن لحظيًا؛ لأنه يتحرك حركة تقصيرية.

٤ حاول أن تحل

٣ تتحرك سيارة في خط مستقيم فتناقصت سرعتها من ٦٣ كم / س إلى ٣٦ كم / س في زمن قدره نصف دقيقة. أوجد العجلة التي تتحرك بها السيارة والزمن الذي يمضي بعد ذلك؛ حتى تسكن لحظيًا.

The relation between displacement and time



ثانيًا: العلاقة بين المسافة والزمن
المساحة تحت منحنى (السرعة - الزمن) تساوي إزاحة الجسم.
في الشكل المقابل الجسم يتحرك بعجلة منتظمة مبتدئًا بسرعة ابتدائية ع. وبعد زمن ن ثانية أصبحت سرعته النهائية ع المساحة تحت المنحنى يمكن حسابها عن طريق تقسيمها إلى مستطيل ومثلث.

المساحة (ف) = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$$ف = ع \cdot ن + \frac{1}{2} (ع - ع) \cdot ن$$

ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$ ن (ع - ع) (وذلك بالتعويض من القانون الأول: ع = ع + ج. ن)

$$ف = ع \cdot ن + \frac{1}{2} ج \cdot ن^2$$

حيث ف، ع، ج هي القياسات الجبرية للإزاحة والسرعة والعجلة.

تعبير شفهي:

- ١- اكتب صيغة قانون (المسافة - الزمن) عندما يبدأ الجسم حركته من سكون.
- ٢- اكتب صيغة القانون السابق عندما ج = ٠، وبم تفسر نوع الحركة في هذه الحالة؟

مثال



لاحظ أن

عندما يقف الجسم فإن ع = ٠

٤ سيارة تتحرك بسرعة ٩٠ كم / س، ضغط السائق على

دواسة الفرامل، بحيث تناقصت السرعة بمعدل ثابت

حتى توقفت السيارة بعد مرور ٥ ثوان. احسب:

أ عجلة السيارة خلال تناقص السرعة.

ب المسافة التي قطعها السيارة؛ حتى توقفت حركتها تمامًا.

الحل

أ لتحويل السرعة من كم/س إلى متر / ث : ٩٠ كم / س = $\frac{٩٠}{١٨} \times ١٠٠٠ = ٥٠ \text{ م / ث}$

بالتطبيق في القانون: ع = ع + ج. ن حيث ع = ٥٠ م / ث، ع = ٠، ن = ٥ ثوان

$$٠ = ٥٠ + ج \cdot ٥ \Rightarrow ج = -١٠ \text{ م / ث}^2$$

أي أن السيارة تتحرك بتقصير منتظم مقداره ١٠ م / ث^٢.

ب) $\therefore$ ف = ع.ن + $\frac{1}{2}$ ج.ن² بالتعويض عن : ع. = $\frac{25}{2}$ م/ث، ن = 5 م/ث، ج = -5 م/ث²
 $\therefore$ ف = $\frac{25}{2} \times 5 + 5 \times (-\frac{1}{2}) = 62,5$ مترًا.

٤ حاول أن تحل

٤) قذفت كرة صغيرة بسرعة 20 م/ث أفقيًا، فتحرّكت في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة $\frac{1}{2}$ م/ث². عين موضع الكرة، وسرعتها بعد مرور 2 ثانية من بدء الحركة.

The relation between the displacement and velocity

ثالثًا: العلاقة بين السرعة والإزاحة

نعلم أن: ع = ع.ج + ج.ن (١) ف = ع.ن + $\frac{1}{2}$ ج.ن² (٢)

بتربيع المعادلة الأولى: ع² = ع² + 2.ع.ج.ن + ج².ن²

$\therefore$ ع² = ع² + 2.ع.ج.ن + ج².ن² بالتعويض من المعادلة (٢) عن قيمة ف

$$ع^2 = ع^2 + 2.ع.ج.ن + ج^2.ن^2$$

مثال

٥) أطلقت رصاصة بسرعة 200 م/ث في اتجاه عمودي على حائط رأسى سمكه 14 سم، فخرجت منه بسرعة 100 م/ث. أوجد مقدار العجلة التقصيرية، وإذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر له نفس المقاومة، فأوجد المسافة التي تغوصها حتى تسكن، علماً بأن العجلة التي تتحرك بها الرصاصة واحدة في الحالتين.

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الرصاصة.

الحالة الأولى: ع = 200 م/ث، ع = 100 م/ث، ف = 14 سم

$$\therefore ع^2 = ع^2 + 2.ع.ج.ن \quad \therefore (200)^2 = (100)^2 + 2.ع.ج.14$$

وبالتبسيط: ج = -6250 م/ث²

الحالة الثانية:

ع = 200 م/ث، ع = 0 م/ث، ج = -6250 م/ث²

$$\therefore ع^2 = ع^2 + 2.ع.ج.ن \quad \therefore 0 = (200)^2 + 2.(-6250).ن$$

$\therefore$ ف = 32 سم أي أن الرصاصة تغوص في الحائط مسافة 32 سم حتى تسكن.

٦ حاول أن تحل

٥) نقصت سرعة سيارة بانتظام من 40 كم/س إلى 10 كم/س بعد أن قطعت مسافة 625 مترًا. أوجد المسافة التي تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

٦) أطلقت رصاصة أفقيًا على كتلة خشبية بسرعة 100 م/ث فغاصت فيها مسافة 50 سم. أوجد العجلة التي تتحرك

بها الرصاصة إذا علم أن العجلة منتظمة ، وإذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للأولى سمكها ١٨ سم. فما هي السرعة التي تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية؟

مثال

The average velocity within n^{th} second : **السرعة المتوسطة خلال الثانية النونية:**

٦) بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ١٠ سم/ث وعجلة منتظمة ٤ سم/ث^٢ في اتجاه سرعته . احسب:
أولاً: المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط.
ثانياً: المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الثامنة والتاسعة معاً.

الحل

فكر

حاول حل المثال السابق بطرق أخرى.

٩) **حاول أن تحل**

٧) بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٣٠ سم/ث، وعجلة منتظمة ٦ سم/ث^٢ في نفس اتجاه سرعته. احسب:

أ) المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

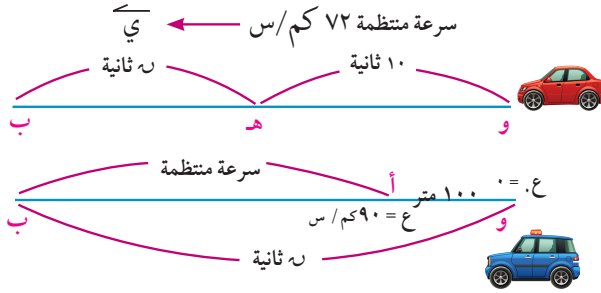
ب) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة فقط.

٨) تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما في اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة، فإذا قطع في الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠ متراً، ثم قطع في الثانية الخامسة والسادسة معاً مسافة ٦٠ متراً. احسب العجلة التي تحرك بها الجسيم وسرعته الابتدائية.

٩) يتحرك مترو الأنفاق في خط مستقيم بين محطتين أ، ب المسافة بينهما ٧٠٠ متر، حيث يبدأ من المحطة أ من السكون بعجلة منتظمة ٢ م/ث^٢ لمدة ١٠ ثوان، ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن، ثم يقطع مسافة ٦٠ متراً الأخيرة من حركته بتقصير منتظم؛ حتى يقف في المحطة ب. أوجد الزمن الذي يستغرقه في قطع المسافة بين المحطتين.

تطبيقات على قوانين الحركة بعجلة منتظمة

٧ تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س. مرت بسيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة في متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ١٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ٩٠ كم / س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذي استغرقته عملية المطاردة منذ لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التي قطعها هذه السيارة.



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه الحركة، وأن سيارة الشرطة كانت ساكنة عند نقطة و ، ثم قطعت مسافة ١٠٠ متر، حتى وصلت إلى أ حيث أصبحت سرعتها ٩٠ كم / س ثم سارت بها بانتظام حتى لحقت بالسيارة الأولى عند ب.

$$٧٢ \text{ كم / س} = ٧٢ \times \frac{٥}{١٨} = ٢٠ \text{ متر / ث} ، \quad ٩٠ \text{ كم / س} = ٩٠ \times \frac{٥}{١٨} = ٢٥ \text{ متر / ث}$$

بالنسبة لسيارة الشرطة في الفترة من و ← أ

$$٠ = ع ، \quad ع = ٢٥ \text{ م / ث} ، \quad ف = ١٠٠ \text{ متر} \quad ع = ع^٢ + ٢ \cdot ح \cdot ف$$

$$٢٥ \times ٢٥ = ٢٠ \times ح + ٢ \times ١٠٠ \times ح \quad \therefore ح = \frac{٢٥}{٨} \text{ م / ث}^٢$$

$$ع = ع + ح \cdot ن \quad \therefore ٢٥ = \frac{٢٥}{٨} \cdot ن \quad \therefore ن = ٨ \text{ ثوان}$$

∴ المسافة التي تحركها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة = ٢٥ (ن - ٨) متر

، تكون السيارة المطاردة قطعت المسافة و ب في زمن قدره = (ن + ١٠) ثانية

، تكون سيارة الشرطة قطعت نفس المسافة و ب في زمن قدره = ن ثانية

$$\therefore ٢٠ (ن + ١٠) = ٢٥ + ١٠٠ (ن - ٨) \quad \text{أي أن} \quad ن = ٦٠ \text{ ثانية}$$

$$\text{المسافة المقطوعة} = ٧٠ \times ٢٠ = ١٤٠٠ \text{ متر}$$

٩ حاول أن تحل

١٠ تتحرك سيارة بسرعة ٥٤ كم / س، مرت على سيارة شرطة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة في متابعتها بعد ٣٠ ثانية من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ٢٠٠ متر؛ حتى بلغت سرعتها ٧٢ كم / س ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذي استغرقته عملية المطاردة من لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التي قطعها هذه السيارة.



تمارين (٢ - ٢)



١ أكمل ما يأتي:

أ يتحرك جسم في خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة مقدارها $4 \text{ م} / \text{ث}^2$ فإن سرعته بعد 6 ثوان من بدء الحركة = ... $\text{م} / \text{ث}$.

ب المسافة التي يقطعها جسم يتحرك في اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها $5 \text{ سم} / \text{ث}^2$ في زمن قدره 4 ثوان = ... سم .

ج السرعة المتوسطة لجسم يتحرك بسرعة ابتدائية $ع$. وعجلة منتظمة $ج$ خلال الثانية السادسة من حركته = ...
 د السرعة المتوسطة لجسم يتحرك بسرعة ابتدائية $ع$. وعجلة منتظمة $ج$ خلال الثواني السابعة والثامنة والتاسعة = ...

ه يتحرك جسم من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع 24 متراً في الثواني الأربع الأولى من حركته، فإن مقدار عجلته = ...

و بدأ جسم حركته من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها $2 \text{ سم} / \text{ث}^2$ فقطع مسافة 25 سم ، فإن سرعته في نهاية تلك المسافة = ... $\text{سم} / \text{ث}$.

٢ انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقدارها $4 \text{ م} / \text{ث}^2$. ما المسافة التي تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها $24 \text{ م} / \text{ث}$ ؟

٣ تسير سيارة سباق في الحلبة بسرعة $44 \text{ م} / \text{ث}$ ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت، حتى أصبحت $22 \text{ م} / \text{ث}$ خلال 11 ثانية. أوجد المسافة التي قطعها السيارة خلال هذا الزمن.

٤ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة فزادت سرعته من $10 \text{ م} / \text{ث}$ إلى $20 \text{ م} / \text{ث}$ بعد أن قطع مسافة 120 متراً، أوجد الزمن اللازم لذلك.

٥ يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته $7,5 \text{ م} / \text{ث}$ خلال 4 ثانية. فإذا كانت إزاحة الدراجة خلال فترة التسارع تساوي 19 متراً. أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

٦ يتدرب كريم على ركوب الدراجة، يدفعه والده فيكتسب تسارعاً ثابتاً مقدارها $\frac{1}{3} \text{ م} / \text{ث}^2$ لمدة 6 ثوان، وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بالسرعة التي اكتسبها لمدة 6 ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضاً. أوجد مقدار المسافة التي يقطعها كريم.

٧ هبط راكب دراجة من قمة تل منحدرًا بعجلة ثابتة مقدارها $2 \text{ م} / \text{ث}^2$ وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته $18 \text{ م} / \text{ث}$ ثم استخدم الفرامل؛ حتى يحافظ على هذه السرعة لمدة دقيقة واحدة. أوجد المسافة الكلية التي قطعها راكب الدراجة.

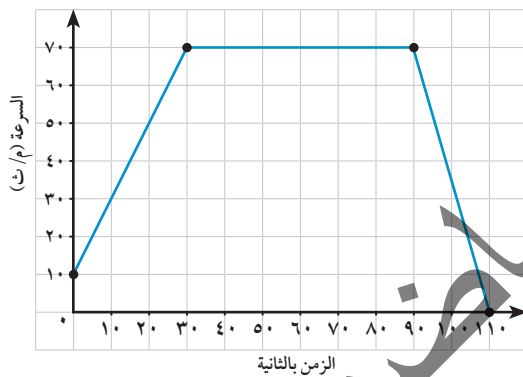
٨ قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها $24 \text{ م} / \text{ث}$ ، شاهد فجأة طفلاً يمر في الشارع، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{1}{3}$ ثانية ثم تحركت السيارة بتقصير منتظم مقدارها $9,6 \text{ م} / \text{ث}^2$ حتى وقفت. أوجد المسافة الكلية التي تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.

٩) بدأ جسم حركته من السكون في خط مستقيم أفقى بعجلة منتظمة مقدارها 4 م/ث^2 لمدة 30 ثانية، ثم تحرك بالسرعة التى اكتسبها لمدة 40 ثانية أخرى فى نفس الاتجاه. أوجد مقدار سرعته المتوسطة.

١٠) يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع 26 متراً خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة، 56 متراً خلال الثانية التاسعة، أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

١١) س، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من س نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة 10 م/ث^2 وفى نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو س بسرعة منتظمة مقدارها 54 كم/س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوى 162 كم/س . أوجد الزمن الذى تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركهما معاً حتى لحظة التقائهما.

نشاط



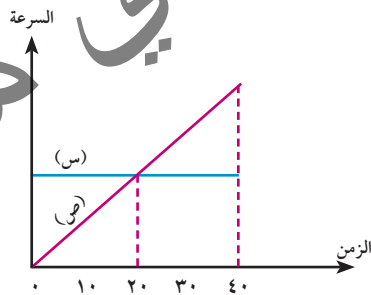
١٢) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها 10 م/ث وحتى سكن بعد زمن قدره 110 ثانية. أوجد:

- عجلة التسارع.
- مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.
- المسافة الكلية التى تحركها الجسم.

تفكير إبداعى:

١٣) مصعد ساكن بقاع منجم، أخذ المصعد فى الارتفاع بعجلة مقدارها 120 م/ث^2 مسافة 540 م ، ثم بسرعة منتظمة مسافة 360 م ، ثم بتقصير منتظم مسافة 720 م ؛ حتى سكن عند فوهة المنجم. احسب الزمن الذى استغرقه المصعد فى الصعود من قاع المنجم إلى فوهته.

تفكير إبداعى:



١٤) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لحركة سيارتين س، ص أوجد الزمن الذى تتقابل فيه السيارتان (فسر إجابتك).



السقوط الحر

Free Fall

تمهيد

ما الذى يحدث عندما تسقط برتقالة من شجرة؟

تتحرك البرتقالة من سكون ، ثم تكتسب سرعة فى أثناء سقوطها سقوطاً حراً نتيجة تأثير جاذبية الأرض عليها فبعد ١ ثانية ستكون سرعتها ٩,٨ م/ث لأسفل ، وبعد ثانية أخرى ستصبح سرعتها ١٩,٦ م/ث لأسفل وهكذا...

لاحظ أن: سرعة البرتقالة تتناسب طردياً مع الزمن.

إن التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطاً حراً (مع إهمال مقاومة الهواء) يساوى ٩,٨ م/ث^٢ تقريباً ويرمز له بالرمز (g) ويختلف باختلاف خط العرض فيقل عند خط الاستواء ويزداد قليلاً كلما اتجهنا نحو القطبين ، ويعتبر التسارع موجباً أو سالباً حسب النظام الإحداثي الذى يتم اتخاذه ، فإذا كان الجسم ساقطاً أو مقذوفاً نحو سطح الأرض فنعتبر (g) ، موجبة ، أما إذا كان مقذوفاً إلى أعلى فتعتبر (g) سالبة.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:

تخضع الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (g) الدالة على التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطاً حراً بدلاً من الرمز (ج) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

$$ع = ع. + و ن ، ف = ع. ن + \frac{1}{2} و ن^2 ، ع^2 = ع. + 2 و ف$$

حيث ع ، و ، ف هى القياسات الجبرية لمتجهات السرعة والعجلة والازاحة

ولذلك عند تطبيق القوانين بالصورة السابقة يجب مراعاة ع ، ع. ، و ، ف تبعاً لما يأتى.

أولاً: إذا كان الجسم ساقطاً أو مقذوفاً نحو سطح الأرض

يعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل فتكون كل من ع. ، ع ، و ، ف موجبة.

مثال

١) أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية.

أ) ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية؟

سوف تتعلم

- قوانين الحركة الرأسية.
- دراسة حركة الأجسام الساقطة أو المقذوفة لأسفل.
- دراسة حركة الأجسام المقذوفة لأعلى.

المصطلحات الأساسية

- سقوط حر Free fall
- عجلة الجاذبية الأرضية Acceleration of gravity

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

ب) ما المسافة التي تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن؟

الحل

أ) صيغة القانون: $ع = ع + و ن$

بالتعويض عن $ع = 0$ ، $و = 9,8$ م/ث²، $ن = \frac{1}{4}$ ثانية.

$$ع = 0 + 9,8 \times \frac{1}{4} = 2,45 \text{ م/ث}$$

ب) صيغة القانون: $ف = ع + و ن + \frac{1}{2} و ن^2$

بالتعويض عن $ع = 0$ ، $و = 9,8$ م/ث²، $ن = \frac{1}{4}$ ثانية.

$$ف = 0 + 9,8 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 9,8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1,4 \text{ متر.}$$

٩ حاول أن تحل

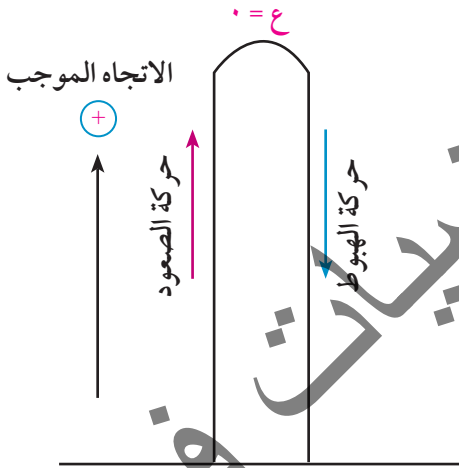
١) سقطت تفاحة من شجرة، وبعد ثانية واحدة ارتطمت بالأرض.

أ) احسب سرعة التفاحة لحظة ارتطامها بسطح الأرض، ثم احسب السرعة المتوسطة خلال زمن سقوطها.

ب) ما بُعد التفاحة عن سطح الأرض لحظة بداية سقوطها؟

ثانيًا: إذا كان الجسم مقذوفًا إلى أعلى

نشاط



قذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩,٦ م/ث². باعتبار أن الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب فتكون السرعة الابتدائية موجبة تبعاً لذلك، أما التسارع فيكون سالباً -

لماذا؟

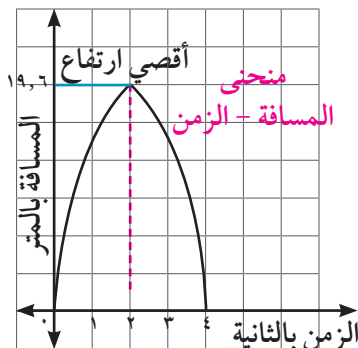
استخدم برنامج (geogebra) في رسم العلاقة بين (السرعة - الزمن)

حيث $ع = 19,6 - 9,8 ن$ عندما $ن \in [0, 4]$

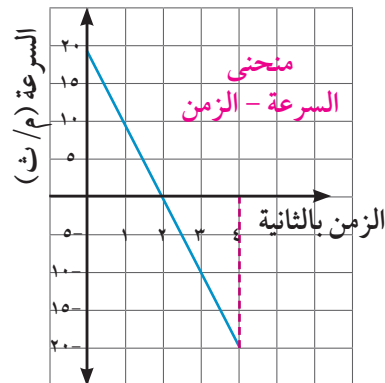
ماذا تلاحظ؟

استخدم نفس البرنامج في رسم العلاقة بين (المسافة - الزمن):

حيث $ف = 19,6 ن - 4,9 ن^2$ ، ماذا تلاحظ؟



شكل (٢)



شكل (١) تطبيقات الرياضيات - علمي

نلاحظ من الشكل البياني أن:

◀ سرعة الجسم في أثناء الصعود تكون موجبة، وفي أثناء الهبوط تكون سالبة.

فمثلاً: عندما $n \in [0, 2]$ نلاحظ أن سرعة $v < 0$ ، عندما $n \in [2, 4]$ فان $v > 0$.

لاحظ أن



$$\text{زمن أقصى ارتفاع} = \frac{v}{g}$$

$$\text{أقصى ارتفاع} = \frac{v^2}{2g}$$

◀ سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوي صفراً.

◀ زمن الصعود للجسم يساوي زمن الهبوط.

◀ مقدار سرعة الجسم التي يعود بها إلى نقطة القذف تساوي مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.

◀ إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التي قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

تفكير ناقد:

١- إذا قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية (ع). فبلغت سرعته النهائية (ع) في زمن قدره (ن) فأوجد.

أ) زمن وصول الجسم إلى أقصى ارتفاع.

ب) مسافة أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

مثال

٢) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٤٩ م/ث. أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التي وصل إليها.

الحل

باعتبار أن الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب فإن:

$$v = 49 \text{ م/ث} , \quad v = 9.8 \text{ م/ث}^2 , \quad v = 0 \text{ (عند أقصى ارتفاع)}$$

أ) لإيجاد زمن أقصى ارتفاع:

$$0 = 49 - 9.8n \quad \therefore n = 5 \text{ ثوان.}$$

ب) لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع:

$$0 = 49^2 - 2 \times 9.8 \times f \quad \therefore f = 122.5 \text{ متراً}$$

فكر:

١- هل يمكنك استخدام قوانين أخرى لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع؟ وضح ذلك.

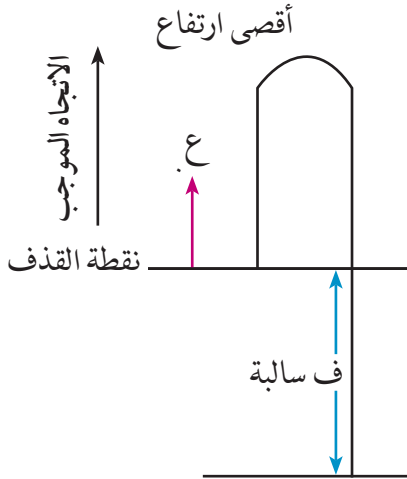
٤ حاول أن تحل

٢) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٣٩,٢ م/ث. أوجد زمن أقصى ارتفاع والمسافة التي وصل إليها.

مثال

٣) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٦ م/ث. أوجد الزمن الذي يأخذه الجسم؛ حتى يصل إلى ٣٣٠ متراً أسفل نقطة القذف.

الحل



نعتبر الاتجاه الرأسى إلى أعلى هو الاتجاه الموجب

ع = ١٦ م/ث لأنها نفس اتجاه القذف.

د = -٩,٨ لأنها عكس اتجاه عملية الجاذبية الأرضية.

ف = -٣٣٠ لأنها أسفل نقطة القذف.

ف = ع.ن + $\frac{1}{2} د ن^2$

- ٣٣٠ = ١٦ن - $\frac{1}{2} \times ٩,٨ ن^2$ بالتبسيط $٤٩ ن^2 - ١٦ ن - ٣٣٠ = ٠$

بالتحليل المقدار الثلاثى: (ن - ١٠) (٤٩ ن + ٣٣٠) = ٠

ن = ١٠ ، ن = $-\frac{٣٣٠}{٤٩}$ (مرفوض)

فكن:

١- هل توجد لديك حلول أخرى؟ وضح ذلك.

٢- حاول أن تحل

٣- قذفت كرة صغيرة رأسياً إلى أعلى من نافذة أحد المنازل، وشوهدت الكرة وهى هابطة أمام النافذة بعد ٣ ثوان من قذفها، ثم وصلت إلى سطح الأرض بعد ٤ ثوان من لحظة القذف. أوجد ارتفاع هذه النافذة عن سطح الأرض.

تمارين (٢-٣)

١- طفل يسقط كرة من نافذة ترتفع ٦,٣ م عن الرصيف. ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف؟

٢- سقطت كرة رأسياً إلى أسفل. ما سرعتها بعد ٦ ثوان من لحظة سقوطها؟

٣- سقط جسم رأسياً لأسفل من ارتفاع ٩٠ م عن سطح الأرض أوجد:

أ زمن الوصول إلى سطح الأرض.

ب سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

٤- سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسياً إلى أعلى مسافة ٢ متر. احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.

٥- يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسياً إلى أعلى فى الهواء، ثم تعود الكرة أثر كل ركلة فتصدم بقدمه، فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمه ٣,٠ ثانية. أوجد:

أ السرعة الابتدائية.

ب الارتفاع الذى وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

- ٦ من أعلى تل ارتفاعه ٩,٨ أمتار قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٩,٤ م/ث أوجد:
- أ سرعة الجسم عند لحظة وصوله إلى أسفل التل.
- ب الزمن الذي استغرقه للوصول إلى أسفل التل.

- ٧ قُذف حجر في بئر بسرعة ٤ م/ث رأسياً لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية. أوجد:
- أ عمق البئر.
- ب سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.

- ٨ قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠ م عن سطح الأرض. أوجد الزمن الذي يأخذه الجسم؛ حتى يصل إلى سطح الأرض.

- ٩ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد ٤ ثوان من لحظة القذف ووصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان من لحظة القذف. أوجد
- أ سرعة قذف الكرة.
- ب أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.
- ج ارتفاع النافذة عن سطح الأرض.

- ١٠ من قمة برج ارتفاعه ٨٠,٥ متراً قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٨,٤ م/ث. أوجد:
- أ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.
- ب الزمن الذي يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته ١١,٢ م/ث.
- ج زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.
- د زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

- ١١ من أعلى تل ارتفاعه ١٤٠ م قذفت كرة رأسياً إلى أعلى ، فوجد أنها قطعت في الثانية الثالثة مسافة ١٠,٥ أمتار. أوجد:

- أ السرعة التي قذفت بها الكرة.
- ب أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة.
- ج الزمن الذي استغرقته الكرة في الوصول إلى سطح الأرض.

تفكير ابداعي:

- ١٢ سقط جسم من ارتفاع ٦٠ متراً من سطح الأرض، وفي نفس اللحظة قذف جسم آخر رأسياً لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية. أوجد هذا الزمن، ثم أوجد المسافة التي قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية، ثم اذكر هل الجسمان لحظة التقابل متحركان في اتجاهين متضادين أم في نفس الاتجاه؟

قانون الجذب العام

Universal gravitation law

فكر و ناقش



ماذا يحدث لحركة القمر لو فقدت الأرض قوة جاذبيتها للقمر؟ بالتأكيد سيسلك مساراً آخر بدلاً من أن يكون مساره شبه دائري حول الأرض.
لقد أدرك نيوتن أن القوى المسؤولة عن جاذبية الأرض للقمر وجاذبية الشمس للكواكب إنما هي حالة خاصة من الجذب العام بين الأجسام.
وسوف نتعرف الآن على قانون الجذب العام لنيوتن الذى نشره فى بحثه الرياضى بمبادئ الفلسفة الطبيعية عام ١٦٨٧م حيث ذكر نيوتن أن:
كل الأجسام فى الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة مباشرة تتناسب طردياً مع كتلتها وعكسياً مع مربع المسافة بين مركزيهما.
فإذا كان لدينا كتلتان ك_١ ، ك_٢ وتفصل بين مركزيهما مسافة ف فإن مقدار قوة الجذب

بينهما تعطى بالعلاقة:
$$F = G \frac{K_1 K_2}{r^2}$$
 حيث

ك_١ ، ك_٢ مقاستان بالكيلوجرام ، ف مقاسة بالمتر ، ث هو ثابت الجذب العام.

gravitational constant

تعريف ثابت الجذب العام:

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين، مقدار كل منهما ١ كيلو جرام، والمسافة بين مركزيهما ١ متر ويساوى تقريباً $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن . متر^٢ / كجم^٢.

تعبير شفهي:

١- اذكر العوامل التى تتوقف عليها قوة التجاذب بين جسمين.

فكر:

١- ماذا يحدث لقوة الجذب المتبادلة بين جسمين إذا ازدادت المسافة بينهما؟

٢- لماذا لا تظهر قوى التجاذب المادى بين الأجرام السماوية بوضوح؟

مثال



١) كرتان كتلة الأولى ٥,٢ كجم وكتلة الثانية ٠,٢٥ كجم، وضعت الكرتان، بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠ سم. احسب قوة التجاذب بينهما ، علماً بأن ثابت الجذب العام يساوى $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢.

سوف نتعلم

- قانون الجذب لنيوتن.
- تعريف ثابت الجذب العام.
- المقارنة بين عجلتي الجاذبية على سطحى كوكبين.

المصطلحات الأساسية

- جذب عام
- Universal gravitation
- ثابت الجذب العام
- Gravitational constant
- قوة الجذب.
- Attraction force

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator

الحل 

ك = ٥,٢ كجم ، ك = ٠,٢٥ كجم ، ف = $\frac{1}{4}$ م ، ث = $6,٦٧ \times 10^{-11}$ نيوتن.م / كجم^٢

$$11- 10 \times 6,67 \times \frac{25 \times 0,2}{\frac{1}{4}} = 9 \therefore \frac{2 \text{ ك } 1 \text{ ك}}{2 \text{ ف}} \times \text{ث} = 9$$

و = $3,4684 \times 10^{-10}$ نيوتن (وهي قوة صغيرة جدًا).

٩ حاول أن تحل

١ إذا علمت أن كتلة الأرض 6×10^{24} كجم وكتلة القمر 7×10^{22} والمسافة بين مركزيهما 3×10^7 متر وثابت الجذب العام $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن. م^٢ / كجم^٢. أوجد قوة جذب الأرض للقمر.

مثال 

٢) قمر صناعي كتلته ك كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التي كتلتها 6×10^{24} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم أوجد ك لأقرب كجم علماً بأن ثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن.م^٢/ كجم^٢، قوة جذب الأرض للقمر هي ١٧٣١٠ نيوتن.

الحل

١ ك، ٢ ك، ٣ ك = ٦ × ٢٤١٠، ف = (٦٣٦٠ + ٤٤٠) × ١٠٠ م

وبالتعويض فى القانون: ق = ث × $\frac{ك_١}{ك_٢}$

$$\frac{2^{10} \cdot 10 \times 6 \times 5}{2(100 \times 680)} \times 11 = 10 \times 6,77 = 1731.$$

ك = ۰.۳۵۹۸۲، ۲۰۰۰ $\simeq$ ۲۰۰۰ كجم

$$\frac{2(100 \times 680) \times 1731}{24 \times 10 \times 6 \times 11 - 10 \times 6,67} = \text{ك أي أن:}$$



$$\frac{(17310 \times (6800 \times 1000)) \times^2}{(67 \times 10^6 - 11 \times 6 \times 10^2 \times 4)} =$$

حاول أن تحل

٢) قمر صناعي كتلته ١٥٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٥٤٠ كم من سطح الأرض التي كتلتها 6×10^{24} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

أوجد قوة جذب الأرض للقمر بالنيوتن علماً بأن ثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن م²/كجم²

مثال 

حساب كتلة الأرض

٣ احسب كتلة الأرض بوحدة كجم بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها. علمًا بأن طول نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم، ث = $6,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. م^٢ / كجم^٢

الحل 

قوة جذب الأرض للجسم = ك ى (حيث ك = ١ كجم ، ى = ٩,٨ م / ث^٢)

۹ = ۹ × ۱ = ۹ نیوتن.

نصف قطر الأرض = 6360×1000 متر ، $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن . م² / كجم²

بتطبيق قانون الجذب العام: $و = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}$

$$9,8 = \frac{1 \times ك للأرض}{(1000 \times 6360)^2} \times 6,67 \times 10^{-11}$$

$$كتلة الأرض (ك) = \frac{(1000 \times 6360) \times 9,8}{6,67 \times 10^{-11}} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ كجم}$$

أضف إلى معلوماتك

قوة جذب الأرض لجسم كتلته ك كجم = ك² = 9,8 ك

تفكير ناقدي: هل تتغير كتلة الأرض في المثال السابق إذا كانت كتلة الجسم الموضوع فوق سطحها يساوي 1000 كجم؟ فسر ذلك.

حاول أن تحل

٣ احسب نصف قطر الأرض بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها علمًا بأن كتلة الأرض تساوي 6×10^{24} كجم وثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن . م² / كجم²

مثال

تعيين عجلة الجاذبية الأرضية (و)

٤ احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م / ث² لجسم كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها. علمًا بأن كتلة الأرض تساوي 6×10^{24} كجم، نصف قطر الأرض يساوي 6360 كم

الحل

∴ قوة جذب الأرض للجسم = ك و ∴ $و = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}$

أي أن $و = ك$ ∴ $و = \frac{1 \times 6 \times 10^{24}}{(6360 \times 1000)^2} \times 6,67 \times 10^{-11} \simeq 9,8379 \text{ م / ث}^2$

حاول أن تحل

٤ في المثال السابق احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م / ث² إذا كانت كتلة الجسم الموضوع على سطحها 100 كجم - ماذا تلاحظ؟

نشاط

المقارنة بين عجلتي الجاذبية على سطحى كوكبين:

إذا كانت $و_1$ ، $و_2$ عجلتا الجاذبية لكوكبين كتلتهما بالكجم ، $ك_1$ ، $ك_2$ ، $م_1$ ، $م_2$ نصفى قطريهما بالمتري على الترتيب.

$$\frac{و_1}{ك_1} \times \frac{ك_2}{م_2} = \frac{و_2}{ك_2}$$

فيمكن استنتاج العلاقة الآتية:

مثال

٥ إذا كانت كتلة الأرض قدر كتلة القمر ٨١ مرة وقطراهما ١٢٧٥٦ كم ، ٣٤٧٦ كم على الترتيب فإذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية 9,8 م / ث² فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر؟

الحل

نفرض أن كتلة القمر ك كجم فتكون كتلة الأرض = ٨١ ك كجم
 مو_١ = ٦٣٧٨ كم ، مو_٢ = ١٧٣٨ كم ، مو_٣ = ٩,٨ م / ث^٢ ، مو_٤ = ؟
 $\therefore \frac{1}{\mu_1} \times \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3} \therefore \frac{1}{\mu_1} \times \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3} \therefore \frac{1}{\mu_1} \times \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3}$
 وبالتبسيط:
 مو_٤ للقمر ≈ ١,٦٣ م / ث^٢

حاول أن تحل

٥ إذا علمت أن كتلة الأرض ٩٧,٥ × ١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦,٣٤ × ١٠^٦ م وكتلة القمر ٧,٣٦ × ١٠^{٢٢} ونصف قطره ١,٧٤ × ١٠^٦ م فأوجد النسبة بين الجاذبية على سطح القمر إلى سطح الأرض.

تمارين الدرس الرابع

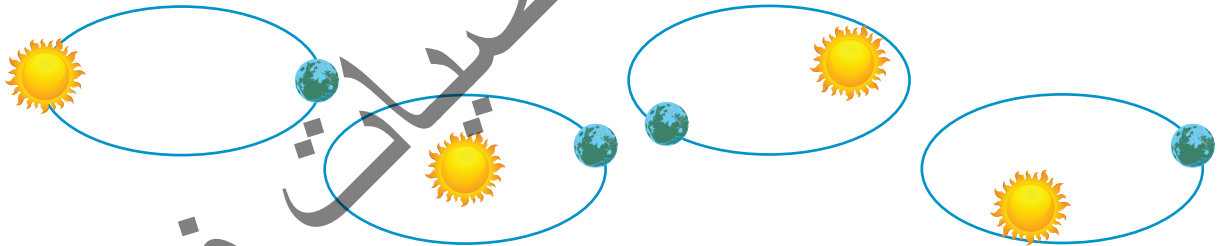
تنبيه: اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن: ث = ٦,٦٧ × ١٠^{-١١} نيوتن.متر^٢ / كجم^٢

١ ماذا يحدث لو زنتك كلما ابتعدت أكثر عن سطح الأرض؟

٢ لماذا لا تظهر قوة الجاذبية بين الأجسام التي نشاهدها يوميًا؟

٣ ماذا يحدث لقوة الجذب العام بين جسمين عند مضاعفة المسافة بين مركزيهما؟

٤ أي من المدارات الموضحة بالشكل التالي يُعتبر مدارًا ممكنًا لكوكب ما؟



٥ اختيار من متعدد: كوكب لديه قمران متساويا الكتلة، القمر الأول في مدار دائري نصف قطره مو، القمر الثاني في مدار دائري نصف قطره مو٢. إن مقدار قوة الجاذبية التي يؤثر بها الكوكب على القمر الثاني هي:

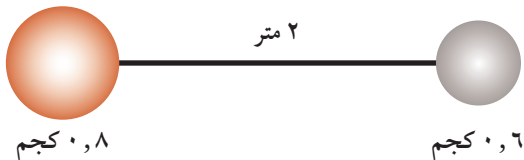
أ أكبر أربع مرات من القوة المؤثرة على القمر الأول.

ب أكبر مرتين من القوة المؤثرة على القمر الأول.

ج تساوى القوة المؤثرة على القمر الأول.

د نصف القوة المؤثرة على القمر الأول.

٦ في الشكل المقابل:



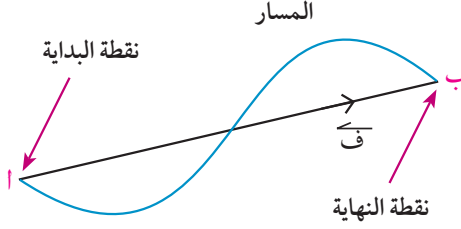
إذا كان البعد بين مركزي كرتين ٢ م وكانت كتلة

إحدهما ٠,٨ كجم، وكتلة الأخرى ٠,٦ كجم فما

قوة التجاذب بينهما؟

- ٧) كرتان متماثلتان كتلة كل منهما ٦,٨ كجم والبعد بين مركزيهما ٢١,٨ سم، ما قوة التجاذب بينهما؟
- ٨) احسب قوة التجاذب بين جسمين كتليهما ١٠ كجم، ١٥ كجم والمسافة بينهما ٢ أمتار.
- ٩) قمر صناعي كتلته ٢٠٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التي كتلتها 6×10^{24} كجم. أوجد قوة جذب الأرض للقمر علمًا بأن نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم.
- ١٠) إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (g) هي ١٠ م / ث^٢ ونصف قطر الأرض يساوي $6,3٦ \times 10^6$ متر. احسب كتلة الأرض.
- ١١) احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير في مدار شبه دائري حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوي 6×10^{24} كجم، وكتلة الشمس تساوي 9×10^{29} كجم، والمسافة بين مركزيهما تساوي $1,5 \times 10^{11}$ متر.
- ١٢) إذا علمت أن كتلة الأرض تساوي $5,97 \times 10^{24}$ كجم ونصف قطرها $6,3٦ \times 10^6$ متر وكتلة القمر تساوي $7,3٦ \times 10^{22}$ كجم فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.
- ١٣) إذا علمت أن كتلة الأرض $6,٠٦ \times 10^{24}$ كجم ونصف قطرها $6,3٦ \times 10^6$ متر فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية.
- ١٤) كوكب كتلته مساوية لثلاث مرات كتلة الأرض، وقطره يساوي ثلاث مرات قدر قطر الأرض. احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض.
- ١٥) أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول 2×10^{21} طن وكتلة الثاني 4×10^{20} طن، والمسافة بين مركزيهما 2×10^6 كم.
- ١٦) وضعت قطعة من الحديد على بعد ٥٠ سم من أخرى من النيكل كتلتها ٢٥ كجم فكانت قوى التجاذب بينهما 10^{-6} نيوتن، فكم تكون كتلة الكرة الحديد مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح؟
- ١٧) جسم كتلته ٤ كجم يقع على ارتفاع ٢ مترًا عن سطح الأرض التي طول نصف قطرها ٦٣٦٠ كم وكتلتها 6×10^{24} كجم. أوجد مقدار قوة الجاذبية التي تؤثر على هذا الجسم.
- ١٨) **الربط بالفضاء:** محطة فضائية دولية وزنها على سطح الأرض ٤٢١٩٩٧,٦ نيوتن. أوجد وزنها عندما تكون في المدار الخارجي على ارتفاع ٣٥٠ كم من سطح الأرض علمًا بأن طول نصف قطر الأرض يساوي $6,3٧ \times 10^6$ كم وكتلتها $5,٩٧ \times 10^{24}$ كجم. (إرشاد: القوة بالنيوتن = الكتلة بكجم $\times$ عجلة الجاذبية الأرضية ٩,٨ م/ث^٢)

ملخص الوحدة



متجه الإزاحة

هو المتجه الذي تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{AB}$ التي نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\overrightarrow{f}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $|| \overrightarrow{AB} ||$

متجه الموضع

هو المتجه الذي تنطبق بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{r}$

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة:

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}$$

متجه السرعة

متجه سرعة جسم هو المتجه الذي معياره يساوي قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

الحركة المنتظمة

هي الحالة التي يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتاً، أي أن: الجسم يتحرك في اتجاه ثابت، حيث يقطع مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

وتكون العلاقة بين القياسين الجبريين للمتجهين $\overrightarrow{f}$ ، $\overrightarrow{e}$ في الحركة المنتظمة هي: $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{e} \cdot n$

متجه السرعة المتوسطة

إذا تحرك جسم عند لحظتين زمنيتين n_1 ، n_2 عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\overrightarrow{f}$ هو متجه الإزاحة في الفترة الزمنية $(n_2 - n_1)$ فإن $\overrightarrow{e}$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسم خلال تلك الفترة الزمنية ويكون:

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{f}}{n_2 - n_1} = \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{n_2 - n_1}$$

السرعة اللحظية:

إذا تحرك جسيم بسرعة متغيرة من خلال منحني المسافة - الزمن فإن ميل المماس عند نقطة ما على المنحني عند لحظة زمنية يعرف بالسرعة اللحظية.

السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (ب) بالنسبة لجسيم آخر (أ) هي السرعة التي يبدو أن الجسيم (ب) يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (أ) في حالة سكون، باعتبار أن $\vec{c}_1$ ، $\vec{c}_2$ هما متجهتا سرعة لجسمين أ، ب وأن متجه سرعة ب بالنسبة

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_2 - \vec{c}_1$$

الحركة منتظمة التغير:

هي الحركة التي يحدث فيها تغير قيمة السرعة بمرور الزمن و يسمى بالتسارع (العجلة) ووحدة قياسه هي م / ث².

$$\text{العجلة (ج)} = \frac{\text{السرعة النهائية} - \text{السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$$

الحركة منتظمة التغير:

يقال إن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتاً مقداراً واتجهاً لجميع الأزمنة.

إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ابتدائية (ع) وعجلة ثابتة (ج) وأصبحت سرعته (ع) بعد فترة زمنية (ن) قطع خلالها مسافة (ف) فإن:

$$\leftarrow \text{العلاقة بين السرعة والزمن: } \vec{c} = \vec{c}_0 + \vec{c}_1 \cdot \vec{t}$$

$$\leftarrow \text{العلاقة بين المسافة والزمن: } \vec{f} = \vec{c}_0 \cdot \vec{t} + \frac{1}{2} \vec{c}_1 \cdot \vec{t}^2$$

$$\leftarrow \text{العلاقة بين السرعة والمسافة: } \vec{c}^2 = \vec{c}_0^2 + 2 \cdot \vec{c}_1 \cdot \vec{f}$$

ويلاحظ أن هذه العلاقات تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداها بمعلومية الثلاثة الآخرين.

المساحة تحت منحني السرعة - الزمن تساوي إزاحة الجسم المتحرك.

السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما تساوي سرعته اللحظية في منتصف هذه الفترة.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:

تخضع قوانين الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (س) الدالة على التسارع الذي يسقط به الأجسام سقوطاً حراً بدلاً من الرمز (ج) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

$$ع = ع. + و.ن، ف = ع.ن + \frac{1}{2} و.ن^2، ع^2 = ع^2 + 2و.ن$$

إذا قذف جسم رأسياً إلى أعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية وعاد إلى نقطة القذف فإن:

سرعة الجسم في أثناء الصعود تكون موجبة وفي أثناء الهبوط تكون سالبة.

سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى صفراً.

زمن الصعود للجسم يساوى زمن الهبوط.

$$\frac{ع}{و} = \text{زمن أقصى ارتفاع (ن)}$$

$$\frac{ع^2}{و} = \text{أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم (ف)}$$

مقدار سرعة الجسم التي يعود بها إلى نقطة القذف تساوى مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.

إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التي قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

قانون الجذب العام لنيوتن

إذا كان المسافة (ف) بين كتلتين ك_١، ك_٢ فإن مقدار قوة الجذب بينهما (و) تعطى بالعلاقة: $و = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^2}$ حيث ك_١، ك_٢ مقاستان بالكيلو جرام، ف بالمتر.

ثابت الجذب العام:

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منها ١ كجم والمسافة بين مركزيها ١ متر ويساوى تقريباً $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن. متر^٢/كجم^٢



تمارين عامة (الوحدة الثانية)



أكمل ما يأتي:

- ١ إذا كان $\vec{v} = 7 \text{ م/ث}$ ، $\vec{a} = -3 \text{ م/ث}^2$ فإن $\vec{v} = \dots$
- ٢ إذا كان $\vec{v} = 70 \text{ م/ث}$ ، $\vec{a} = 50 \text{ م/ث}^2$ فإن $\vec{v} = \dots$
- ٣ إذا تحركت سيارتان أ ، ب بالسرعتين ٦٥ كم/س ، ٧٥ كم/س فإن
 - أ $\vec{v} = \dots$ إذا كانتا في اتجاه واحد.
 - ب $\vec{v} = \dots$ إذا كانتا في اتجاهين متضادين.
- ٤ بدأت سيارة الحركة من سكون بعجلة منتظمة ٢٠ سم/ث لمدة ١٠ ثوان.
 - أ السرعة النهائية للسيارة = $\dots \text{ م/ث}$.
 - ب المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة = $\dots \text{ متر}$.
- ٥ بدأ جسم حركته بسرعة ٧٢ كم/س بعجلة تقصيرية ٢ م/ث^٢.
 - أ الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يقف = $\dots \text{ ثانية}$.
 - ب المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة = $\dots \text{ متر}$.
- ٦ استخدمت سيارة فراملها فتوقفت خلال ١٠ ثوان بعد أن قطعت ٢٥ مترًا.
 - أ عجلة الحركة في أثناء استخدام الفرامل = $\dots \text{ م/ث}^2$.
 - ب سرعة السيارة عند بدء استخدام الفرامل = $\dots \text{ م/ث}$.
- ٧ سقط جسم من قمة برج رأسي فوصل إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان.
 - أ سرعة الجسم عند وصوله إلى سطح الأرض = $\dots \text{ م/ث}$.
 - ب ارتفاع البرج = $\dots \text{ متر}$.
- ٨ قذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ٤ ثوان.
 - أ سرعة قذف الجسم = $\dots \text{ م/ث}$.
 - ب أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم = $\dots \text{ متر}$.
- ٩ من قمة برج ارتفاعه ٢٠ مترًا قذف جسم لأعلى بسرعة ٧ م/ث:
 - أ سرعة الوصول إلى سطح الأرض = $\dots \text{ م/ث}$.
 - ب زمن الوصول إلى سطح الأرض = $\dots \text{ ثانية}$.
- ١٠ كوكب كتلته مساوية لثلاث مرات كتلة الأرض، وقطره يساوي ثلاث مرات قطر الأرض، فإن النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح الكوكب إلى سطح الأرض كنسبة $\dots$:

- ١١) يتحرك جسم في خط مستقيم مسافة ١٠٠ م بسرعة ٥ م/ث، ثم تحرك بسرعة ٨ م/ث في نفس الاتجاه لمدة ١٠ ثوان، أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.
- ١٢) يتحرك جسمان أ، ب في خط مستقيم في الاتجاه بـ أ بالسرعتين ١٠٠٠ م/د، ١٢٠ كم/س فإذا كانت المسافة بينهما ٣٠ كم. أوجد متى وأين يلتقيان؟
- ١٣) قامت سيارة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٣٠ كم/س، ولما ضاعفت السيارة (أ) سرعتها وأعادت القياس وجدت أن سرعة السيارة (ب) أصبحت ١٨٠ كم/س أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارتين.
- ١٤) سيارة لمراقبة السرعة على الطرق السريعة تسير بسرعة ٣٠ كم/س راقبت حركة شاحنة نقل قادمة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س أوجد السرعة الفعلية للشاحنة.
- ١٥) تحرك جسم في خط مستقيم بسرعة ٧ م/ث وبعجلة منتظمة ٤ م/ث^٢. أوجد سرعته والمسافة التي يقطعها خلال ٦ ثوان.
- ١٦) بدأ جسم حركته من سكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢٠ كم/ث^٢ وعندما أصبحت سرعته ٨ م/ث تحرك بتقصير منتظم حتى سكن بعد ١١٢ ثانية من بداية الحركة. احسب العجلة التقصيرية والمسافة الكلية.
- ١٧) تحرك جسم من سكون فقطع ١٥٠ م حتى أصبحت سرعته ٥٤ كم/س فإذا انقطعت العجلة عندئذ وسار بالسرعة التي اكتسبها مسافة ٣٠٠ متر، ثم تحرك بعد ذلك بتقصير منتظم قدره ٣ م/ث^٢ حتى سكن. احسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.
- ١٨) يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٥٢ مترًا في الثوان الأربع الأولى ثم قطع مسافة ٩٢ مترًا في الثوان الأربع التالية لها. احسب عجلة الحركة والسرعة الابتدائية والمسافة المقطوعة خلال ١٠ ثوان الأولى من حركته.
- ١٩) إذا كان $\vec{r}$ متجه موضع جسيم يتحرك في خط مستقيم من نقطة ويتحدد بالعلاقة $\vec{r} = (3 - 2t) \vec{i}$ فأوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوان من بدء الحركة.
- ٢٠) سقط جسم من ارتفاع ف عند سطح الأرض فقطع في الثانية الأخيرة من حركته ٣٤,٣ مترًا. أوجد:
 أ) سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض.
 ب) الارتفاع الذي سقط منه الجسم.
- ٢١) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠ مترًا من سطح الأرض. أوجد:
 أ) الزمن الذي يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.
 ب) المسافة الكلية التي قطعها الجسم حتى وصوله لسطح الأرض.
- ٢٢) وضعت كرة من الحديد على بعد ٤٠ سم من كرة أخرى من النيكل كتلتها ٥٠ كجم فكانت قوة التجاذب بينهما 12×10^{-10} نيوتن فكم تكون كتلة كرة الحديد إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوي $6,67 \times 10^{-11}$ نيوتن. م^٢/كجم^٢



اختبار تراكمي



اختبارين متعدد

- ١ قوتان مقداراهما ١٦، ٨ نيوتن تؤثران في نقطة مادية أوجد:
 - أ مقدار أكبر محصلة لهما.
 - ب مقدار أصغر محصلة لهما.
 - ج مقدار واتجاه محصلتهما عندما يكون قياس الزاوية بينهما 120° .
- ٢ القوى ١٢، $2\sqrt{3}$ ، $3\sqrt{2}$ ، ٨ ث جم تؤثر في نقطة مادية نحو الشرق، الشمال الغربي والجنوبي الغربي والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.
- ٣ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأس بزوايتين قياسيهما 30° ، 60° فأتزن الجسم عندما كان مقدار الشد في الخيط الأول ١٢ نيوتن، مقدار الشد في الخيط الثاني $3\sqrt{12}$ نيوتن. أوجد W و مقدار الوزن W .
- ٤ جسم وزنه ٩٠ ث كجم موضوع على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها 30° . حفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة ق تؤثر على الجسم إلى أعلى في اتجاه يميل على المستوى بزاوية قياسها 30° . أوجد مقدار ق ورد فعل المستوى.
- ٥ قضيب منتظم AB يتصل طرف A بمفصل مثبت في حائط رأسي. أثرت في الطرف الآخر B قوة أفقية فأتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها 45° . فإذا كان وزن القضيب 4 ث كجم ويؤثر في منتصفه. أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.
- ٦ تتحرك سيارة شرطة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٢٥ كم/س. شاهدت سيارة أخرى (ب) تتحرك على نفس الطريق بسرعة ٧٥ كم/س. أوجد سرعة السيارة (ب) بالنسبة للسيارة (أ) عندما:
 - أ السيارتان تتحركان في نفس الاتجاه.
 - ب السيارة (ب) تتحرك في اتجاه مضاد للسيارة (أ).
- ٧ يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٥ سم/ث^٢، وفي نفس اتجاه السرعة الابتدائية لهذا الجسم وقدرها ٤٠ سم/ث. أوجد:
 - أ سرعة الجسم وإزاحته في نهاية ٢٤ ثانية من بدء الحركة.
 - ب سرعة الجسم بعد أن قطع مسافة ٥٦ مترًا من البداية.
- ٨ تتحرك سيارة في طريق مستقيم بتقصير منتظم مقدارها ١٤ سم/ث^٢، فتوقفت عن الحركة بعد مرور ٢٠ ثانية من لحظة البداية. أوجد:
 - أ مقدار سرعتها الابتدائية.
 - ب المسافة التي قطعها خلال نصف دقيقة.

ج المسافة التي قطعتها حتى سكنت.

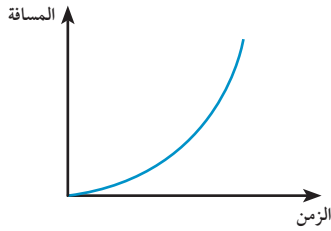
٩ سقط جسم رأسياً إلى أسفل من ارتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة ١٤ م قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره ٦٣ م/ث^٢ فما هو الارتفاع الذي سقط منه الجسم.

١٠ قذف جسم من قمة برج رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها ٢٤,٥ م/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد ٨ ثوان. أوجد:

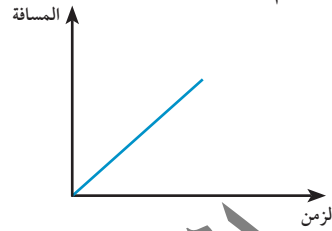
أ ارتفاع البرج. ب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

ج المسافة التي قطعها الجسم خلال هذه المدة.

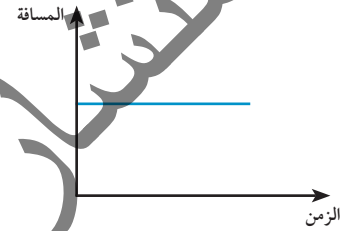
١١ أى من الأشكال الآتية تمثل حركة جسم بسرعة منتظمة



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

١٢ تتساقط قطرات الزيت من إحدى السيارات المتحركة من اليسار إلى اليمين كما بالشكل



بملاحظة قطرات الزيت فإن السيارة تتحرك:

١ - بسرعة منتظمة. ٢ - بعجلة موجبة. ٣ - بعجلة سالبة. ٤ - بعجلة سالبة ثم سرعة منتظمة.

إن لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول التالي:

١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تستطع حل السؤال رقم
٦٦	٥٦	٧٧	٧٦	٧٠	٦٦	٦٠	٣٧	٣٧	٣٤	٢٦	١٦	٨٠	ارجع إلى

الهندسة و القياس

Geometry and Measurement

اشارة

الوحدة

مقدمة الوحدة

نشأت الهندسة فى بدايتها مرتبطة بالناحية العملية، فاستخدمها قدماء المصريين فى تحديد مساحات الأراضى وبناء الأهرامات والمعابد فأوجدوا مساحات بعض الأشكال وحجوم بعض المجسمات. وعندما زار طاليس (٦٤٠ - ٥٤٦ ق.م) الإسكندرية راقى له طرق المصريين فى قياس الأرض وأطلق عليها كلمة Geo-metron المأخوذة عن اللغة اليونانية والمكونة من كلمتى Geo وتعنى الأرض، و metron وتعنى قياس واهتم بدراسة الهندسة على أنها تعبيرات صريحة مجردة خاضعة للبرهان.

تطورت الهندسة على يد الإغريق (طاليس - فيثاغورث - إقليدس) بظهور سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعريف مرتبة فى نظام منطقى دقيق ضمنه إقليدس فى كتابه الأصول المكون من ١٣ جزءاً، واستمرت الإسكندرية منارة المعرفة إلى أن جاء العرب، وحفظوا ذلك التراث وترجمته إلى اللغة العربية وأضافوا إليه إضافات كثيرة ونقلوه إلى أوروبا فى القرن الثانى عشر.

فى القرن السادس عشر بدأ عصر النهضة فى الرياضيات وميلاد علوم جديدة فقدم ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) أسس الهندسة التحليلية وقام بتمثيل المعادلات بأشكال بيانية وهندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات، واستخلص معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ كما توصل أويلر Euler إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة وهى:

$$\text{عدد الأوجه} + \text{عدد الرؤوس} = \text{عدد الأحرف} + 2.$$

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يُعرف النقطة والمستقيم والمستوى فى الفراغ.
- يتعرف بعض المجسمات (الهرم - الهرم المنتظم - الهرم القائم - المخروط - المخروط القائم)، وخواص كل منها.
- يستنتج المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يستنتج حجم كل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يوجد معادلة الدائرة بدلالة إحداثيات كل من مركزها، وطول نصف قطرها.
- يستنتج الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يعين إحداثيات كل من مركز الدائرة، وطول نصف قطرها بمعلومية الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- ينمذج مواقف رياضية باستخدام قوانين الهندسة.

المصطلحات الأساسية

Right pyramid	هرم قائم	Radius	نصف قطر	The point	النقطة
Net of a pyramid	شبكة هرم	Diameter	قطر	Straight line	المستقيم
	مخروط دائري قائم	Pyramid	هرم	plane	المستوى
Right circular cone		Cone	مخروط	Space	الفراغ
Lateral area	مساحة جانبية	Lateral face	وجه جانبي	Vertex	رأس
	مساحة كلية (سطحية)	Lateral edge	حرف جانبي	Base	قاعدة
Surface area		Height	ارتفاع	Axis	محور
		Slant height	ارتفاع جانبي	Circle	دائرة
		Regular pyramid	هرم منتظم	Center	مركز

الأدوات والوسائل

برامج رسومية للحاسوب

آلة حاسبة علمية

أدوات هندسية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ٣): المستقيمت والمستوى

الدرس (٢ - ٣): الهرم والمخروط.

الدرس (٣ - ٣): المساحة الجانبية والمساحة الكلية للهرم والمخروط.

مخطط تنظيمي للوحدة



المستقيمات والمستويات في الفراغ

The lines and the planes in a space

فكر و ناقش



سبق أن درست بعض المفاهيم الرياضية حول كل من النقطة، والمستقيم، والمستوى فهل يمكنك الإجابة عن الأسئلة الآتية:

◀ بَمَ تمثل مدينتك على خريطة جمهورية مصر العربية؟

◀ كم عدد النقاط التي تكفي لرسم خط مستقيم؟

◀ ماذا يمثل لك كل من: أرضية الفصل الدراسي - سطح المنضدة - سطح الحائط.

◀ ماذا يمثل لك كل من: سطح الكرة - سطح قبة المسجد - سطح أسطوانة الغاز.

نشاط



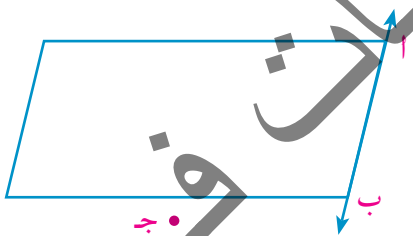
ارسم نقطتين مختلفتين على ورق مقواة مثل أ، ب.

استخدم المسطرة؛ لتصل النقطتين أ، ب ومدهما على نفس الاستقامة.

حاول أن ترسم مستقيماً آخر يمر بنفس النقطتين أ، ب هل يمكنك ذلك؟

ماذا نستنتج من هذا النشاط؟

نشاط



ارسم ثلاث نقاط أ، ب، ج ليست على

استقامة واحدة كما في الشكل الجانبي

ضع قطعة من الورق المقوى على شكل

مستطيل بحيث ينطبق أحد أبعادها على $\overleftrightarrow{AB}$

حرك مستوى الورقة؛ لتدور حول $\overleftrightarrow{AB}$ حتى ينطبق على النقطة ج.

◀ كم وضعاً تنطبق فيه النقطة ج على مستوى الورقة خلال دوران الورقة دورة كاملة؟

سوف تتعلم

- ◀ مفاهيم ومعلومات هندسية
- ◀ العلاقة بين مستقيمين في الفراغ
- ◀ العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفراغ
- ◀ الأوضاع المختلفة لمستويين.

المصطلحات الأساسية

Point	النقطة
Straight line	المستقيم
Plane	المستوى
Space	الفراغ

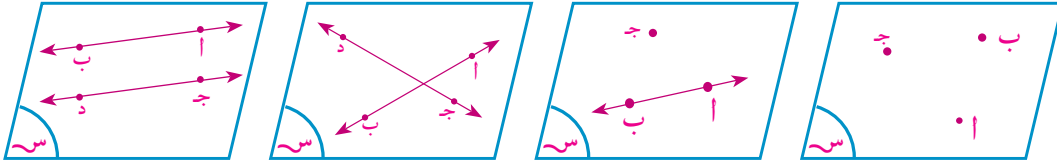
الأدوات والوسائل

- ◀ آلة حاسبة علمية
- ◀ برامج رسومية للحاسوب
- ◀ أدوات هندسية

مسلمات هندسية:

◀ يتحدد الخط المستقيم تحديداً تاماً إذا علم عليه نقطتان مختلفتان.

◀ يتحدد المستوى تحديداً تاماً بإحدى الحالات الآتية:

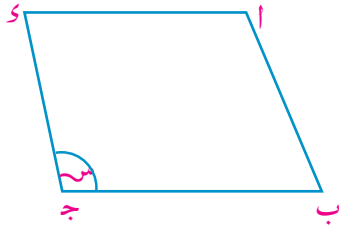


مستقيمان متوازيان

مستقيمان متقاطعان

مستقيم ونقطة
لا تنتمي إليهثلاث نقط ليست
على استقامة واحدة

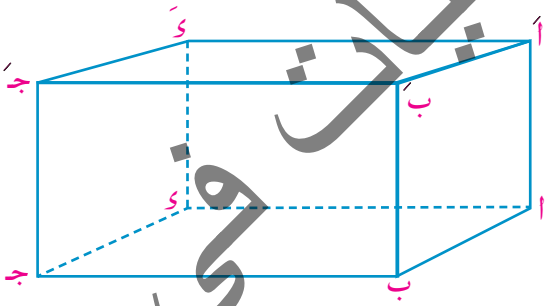
◀ أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لانهائي من المستويات.



المستوى Plane: هو سطح لا حدود له بحيث إن المستقيم المار بأي نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح. ففي الشكل الجانبي يرمز للمستوى بالرمز س- أو ص- أو ع- أو .. أو يرمز له بثلاثة أحرف على الأقل مثل أ ب ج، وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث أو مربع أو مستطيل أو متوازي أضلاع أو دائرة أو ...

الفراغ (الفضاء) Space: هو مجموعة غير منتهية من النقاط، وهو الذي يحتوي جميع الأشكال والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

مثال



١) تأمل الشكل المقابل، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

- اكتب ثلاثة مستقيمت تمر بالنقطة أ.
- اكتب المستقيمت التي تمر بالنقطتين أ، ب معاً.
- اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ.
- اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ، ب معاً.

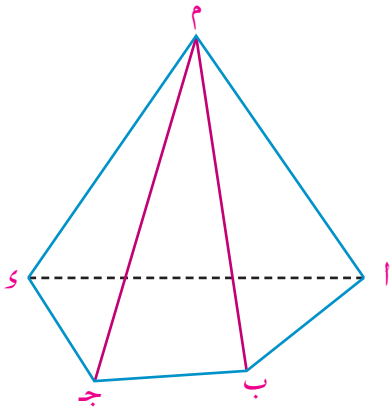
الحل

- أ) $\overleftrightarrow{AS}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$
- ب) $\overleftrightarrow{AB}$
- ج) $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$
- د) $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$

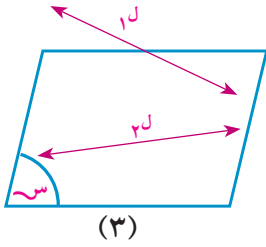
٤ حاول أن تحل

١ تأمل الشكل المقابل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

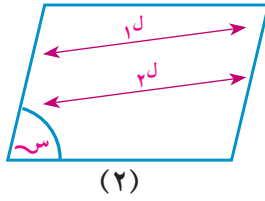
- أ كم عدد المستقيمت بالشكل؟ اذكر المستقيمت التي تمر بنقطة أ.
ب كم عدد المستويات بالشكل؟ اذكر ثلاثة منها تمر بالنقطة أ.



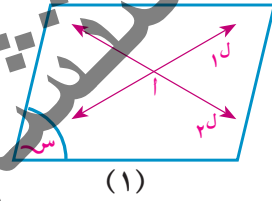
العلاقة بين مستقيمين في الفراغ
تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:



(٣)



(٢)

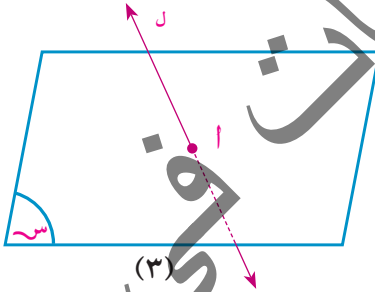


(١)

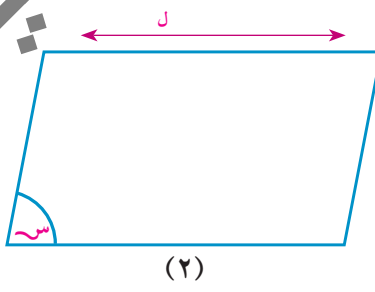
- ١ - المستقيمان المتقاطعان: هما مستقيمان يقعان في نفس ويشتركان في
٢ - المستقيمان المتوازيان: هما مستقيمان يقعان في نفس ولا يشتركان في
٣ - المستقيمان المتخالفان: هما مستقيمان لا يمكن أن يحتويهما

تفكير ناقذ: المستقيمان المتخالفان غير متقاطعين وغير متوازيين. فسر ذلك.

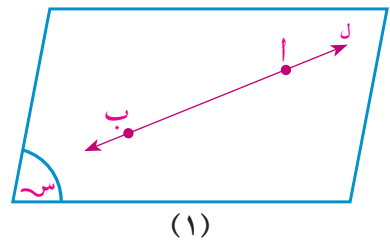
العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفراغ
تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:



(٣)



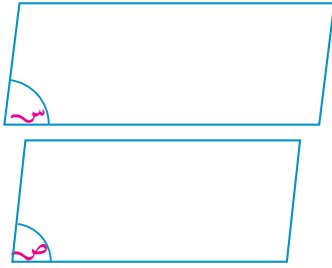
(٢)



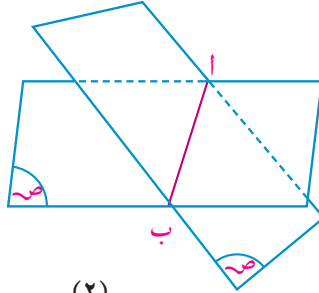
(١)

- المستقيم مواز للمستوى كما في شكل
المستقيم قاطع للمستوى كما في شكل
المستقيم محتوي في المستوى كما في شكل

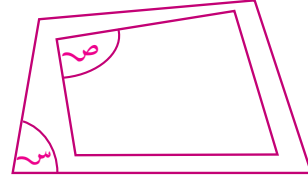
الأوضاع المختلفة لمستويين
تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:



(٣)



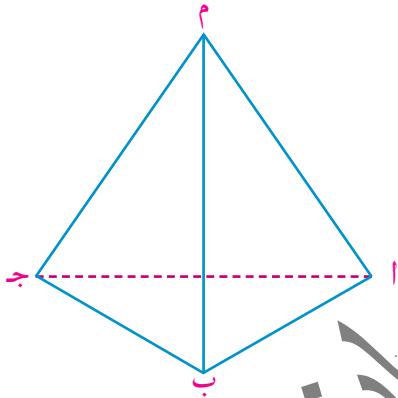
(٢)



(١)

- المستويان متوازيان كما في الشكل
- المستويان منطبقان كما في الشكل
- المستويان متقاطعان كما في الشكل

مثال



٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل ما يأتي:

- أ المستوى م $\cap$ المستوى ب ج = ...
- ب المستوى م $\cap$ المستوى ب ج = ...
- ج م $\cap$ المستوى ب ج = ...
- د م $\cap$ ب ج = ...
- ه المستوى م $\cap$ المستوى ب ج $\cap$ المستوى م ا ج = ...

الحل

- أ م ب
- ب ب ج
- ج {ب}
- د ϕ لأنهما مستقيمان متخالفان
- ه {م}

٣ حاول أن تحل

٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل ما يأتي:

- أ المستوى ا ب ب' $\cap$ المستوى ب ج ج' = ...
- ب المستوى ا ب ج $\cap$ المستوى ا ب' ج' = ...
- ج ا ج' $\cap$ ا ج' = ...
- د ب ب' $\cap$ المستوى ا ب ج = ...



تمارين (٣ - ١)



أكمل مايتأتى:

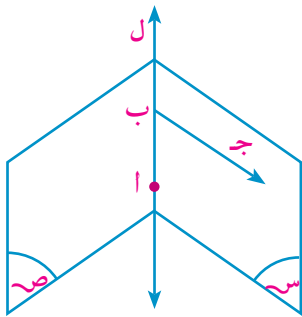
- ١ إذا كان المستقيم $ل$ // المستوى $س$ ، فإن $ل \cap س =$
- ٢ إذا كان المستقيم $ل \supset$ المستوى $س$ فإن $ل \cap س =$
- ٣ إذا كان المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$ فإن $ل_١ \cap ل_٢ =$
- ٤ إذا كان $س$ ، $س$ مستويان حيث $س \cap س = \phi$ فإن $س$ $س$
- ٥ المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا أو

٦ اذكر عدد المستويات التي تمر بكل من:

- أ نقطة واحدة معلومة.
- ب نقطتين مختلفتين .
- ج ثلاث نقط على استقامة واحدة.
- د ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
- ه أربع نقط ليست فى مستوى واحد

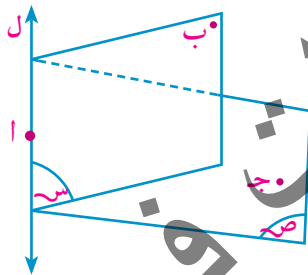
٧ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز ($\supset$ أو $\not\supset$ أو $\cap$ أو $\cap$)

- أ $ل$ $س$
- ب $ا$ $س$
- ج $ج$ $س$
- د $ب$ $ج$



٨ فى الشكل المقابل:

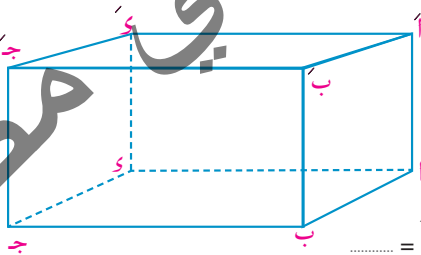
$س$ ، $س$ مستويان متقاطعان فى المستقيم $ل$ ، $ا \in ل$ ، $ب \in س$ ، $ب \notin س$ ، $ج \in س$ ، $ج \notin س$ أكمل مايتأتى:



- أ المستوى $س$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ = ...
- ب المستوى $س$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ = ...
- ج المستوى $س$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ = ...

٩ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايتأتى:

- أ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ $د$ // المستوى
- ب المستوى $ا$ $ب$ $ج$ $د$ // المستوى
- ج المستوى $ا$ $ب$ $ا$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ $د$ = ...
- د المستوى $ا$ $ب$ $ا$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ $د$ = ...
- ه المستوى $ا$ $ب$ $ا$ $\cap$ المستوى $ا$ $ب$ $ج$ $د$ = ...



١٠) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارات الخاطئة فيما يلي بفرض أن $ل$ ، $ل'$ ، $ل''$ مستقيمان، $س$ ، $س'$ مستويات:

- أ) إذا كان $ل \cap ل' = \phi$ فإن $ل // ل'$ أو $ل$ ، $ل'$ متخالفان
 ب) إذا كان $ل \cap ل' = س$ فإن $ل // ل'$
 ج) إذا كان $ل \cap ل' = س$ فإن $ل = ل'$
 د) إذا كان $ل \cap ل' = س$ فإن $ل \subset س$
 هـ) إذا كان $ل \cap ل' = س$ فإن $ل = س$
 و) إذا كان $س = س'$ فإن $س$ ، $س'$ منطبقان

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١١) أي أربع نقط ليست في مستوى واحد تعين لنا:
 أ) مستويان
 ب) ثلاث مستويات
 ج) أربع مستويات
 د) لا تعين مستوي

١٢) إذا اشترك مستويان في نقطتين $أ$ ، $ب$ فإنهما:
 أ) متطابقان
 ب) متقاطعان في $\overleftrightarrow{أب}$
 ج) متقاطعان في مستقيم مواز $\overleftrightarrow{أب}$
 د) يشتركان في نقطة ثالثة لا تقع على $\overleftrightarrow{أب}$

١٣) $\overleftrightarrow{أب}$ توازي المستوى $س$ إذا كان
 أ) $\overleftrightarrow{أب} \cap س = \phi$
 ب) $أ$ ، $ب$ تقعان في جهتين مختلفتين من $س$
 ج) $أ$ ، $ب$ على بعدين مختلفين من المستوى $س$
 د) $\overleftrightarrow{أب} \cap س = \phi$

١٤) المستقيمان $ل$ ، $ل'$ متوازيان إذا كان
 أ) $ل \cap ل' = \phi$
 ب) $ل$ ، $ل'$ ليا $ل'$ يقعان من مستوى واحد
 ج) إذا كان $ل \cap ل' = \phi$ ، $ل$ ، $ل'$ يجمعهما مستوى واحد.
 د) إذا كان $ل \cap ل' = \phi$ ، $ل$ ، $ل'$ لا يجمعهما مستوى واحد.

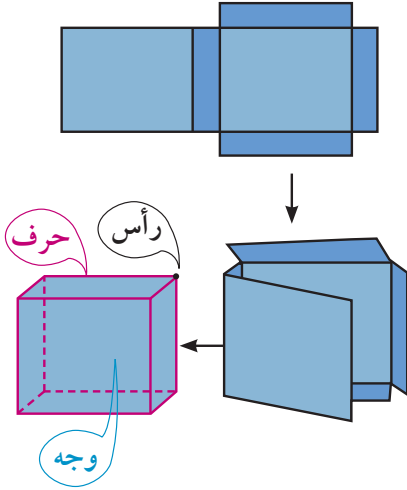
١٥) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا
 أ) غير متوازيين.
 ب) غير منطبقين.
 ج) لا يجمعهما مستوى واحد.
 د) يقعان في مستوى واحد.

تفكير ابداعي

١٦) بين بالرسم أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثني مثني فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تتوازي أو تتلاقى في نقطة واحدة:

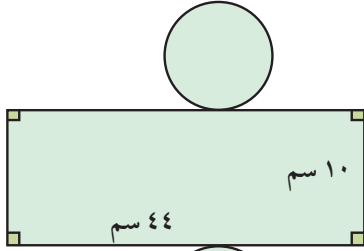
الهرم والمخروط

Pyramid and Cone



تصنع العديد من العبوات بطى ورق الكرتون المسطح إلى أشكال ثلاثية البعد لتعبئة منتجات المصانع قبل تسويقها فتشغل حيزاً من الفراغ ، مثل المكعب ، متوازي المستطيلات ، ...

- كم وجهاً للمكعب؟ وكم رأساً له؟
- كم حرفاً لمتوازي المستطيلات؟
- هل جميع أوجه المكعب متطابقة؟
- فسر إجابتك.



نسمى الشكل الذى يمكن طيه لتكوين مجسم بشبكة المجسم، ومنها نستنتج خواص المجسم. يبين الشكل المقابل شبكة أسطوانة دائرية قائمة ، لاحظ:

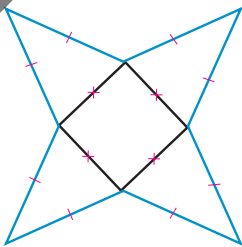
١ - قاعدتي الأسطوانة متطابقتين، وكل منهما على شكل دائرة.

٢ - السطح الجانبي للأسطوانة قبل طيه هو مستطيل بعده ٤٤ سم ، ١٠ سم فيكون ارتفاع الأسطوانة ١٠ سم.

ما طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة؟

فكر:

هل يمكنك معرفة اسم المجسم الذى يمكن تكوينه من طى الشبكة المقابلة؟ استنتج بعض خواصه. هل يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم الواحد؟ فسر إجابتك.



سوف نتعلم

- خواص بعض المجسمات
- الهرم - الهرم المنتظم - الهرم القائم - المخروط - المخروط القائم.
- مفهوم شبكة المجسم واستنتاج خواص المجسم من شبكته - رسم شبكة مجسم.
- نمذجة و حل مشكلات رياضية و حياتية باستخدام خواص الهرم و المخروط القائم.

المصطلحات الأساسية

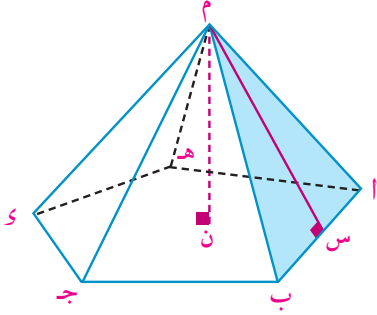
Pyramid	هرم
Cone	مخروط
Lateral face	وجه جانبي
Lateral edge	حرف جانبي
Height	ارتفاع
Slant height	ارتفاع جانبي
Regular pyramid	هرم منتظم
Right pyramid	هرم قائم
Net	شبكة
	مخروط دائري قائم
Right circular cone	

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

Pyramid الهرم

هو مجسم له قاعدة واحدة، وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك في رأس واحدة ويسمى هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا... حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته.



لاحظ: في الشكل المقابل م ا ب ج د هـ هرم خماسي، رأسه م وقاعدته المضلع ا ب ج د هـ، أوجهه الجانبية Lateral faces سطوح المثلثات م ا ب، م ب ج، م ج د، م د هـ، م هـ ا، وأحرفه الجانبية Lateral edges م ا، م ب، م ج، م د، م هـ.

ارتفاع الهرم height (م ن) هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته.
الارتفاع الجانبي Slant height (م س) هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته.

الهرم المنتظم Regular pyramid

هو الهرم الذي قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

تذكر أن

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس مركزه هو مركز الدائرة المرسومة داخله أو خارجه.

خواص الهرم المنتظم

- ١ - أحرفه الجانبية متساوية الطول.
- ٢ - أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.
- ٣ - الارتفاعات الجانبية متساوية.

ملاحظة هامة:

المستقيم العمودي من رأس الهرم على مستوى قاعدته يكون عموديًا على أي مستقيم فيها.

ففي الشكل المقابل إذا كان م ن عمودي على مستوى القاعدة فإن:

$$\overline{م ن} \perp \overline{ا ج د}, \overline{م ن} \perp \overline{ب د}, \overline{م ن} \perp \overline{ن س}$$

ويكون المثلث م س ن قائم الزاوية في ن.

مثال

- ١ م ا ب ج د هـ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته يساوي ١٠ سم، وارتفاعه ١٢ سم، أوجد ارتفاعه الجانبي.

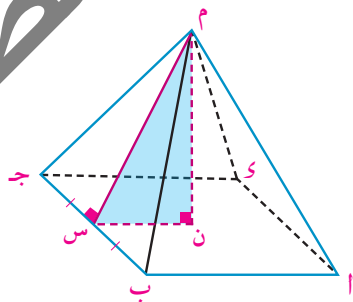
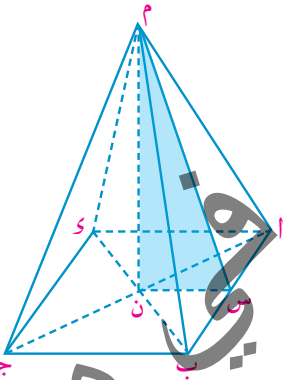
الحل

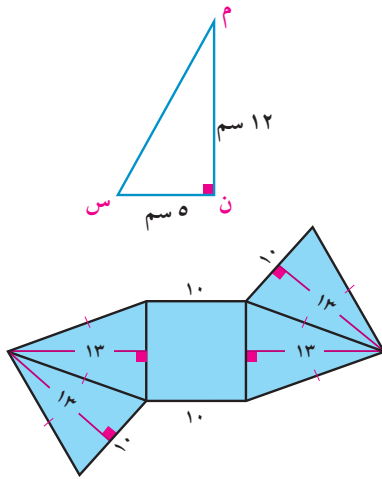
∴ الهرم رباعي منتظم ∴ م ن ⊥ المستوى ا ب ج د

حيث ن نقطة تقاطع قطري المربع ا ب ج د، م ن = ١٢ سم

بفرض س منتصف ب ج ∴ م س ⊥ ب ج (لماذا؟)

ويكون م س ارتفاع جانبي للهرم المنتظم.





في $\triangle$ و ب ج د: ن منتصف ب ج ، س منتصف ب ج

$$\therefore \text{ن س} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ سم}$$

$\therefore \text{م ن} \perp \text{المستوى أ ب ج د}$

$\therefore \triangle$ م ن س قائم الزاوية في ن

$$\text{ويكون: (م س)}^2 = (\text{م ن})^2 + (\text{ن س})^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

$\therefore$ الارتفاع الجانبي للهرم = 13 سم

ويوضح الشكل المقابل إحدى شبكات الهرم م أ ب ج د.

٢ حاول أن تحل

١ م أ ب ج د هرم رباعي منتظم ارتفاعه 20 سم، وارتفاعه الجانبي 25 سم. أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.

Right pyramid

الهرم القائم

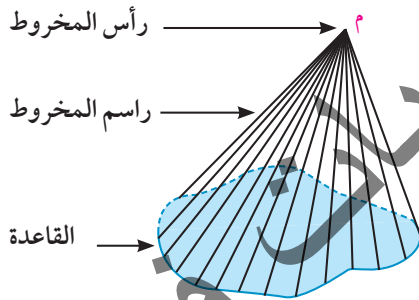
يكون الهرم قائماً إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي.

فكر:

١ - هل الهرم المنتظم هو هرم قائم؟ فسر إجابتك.

٢ - هل الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية؟

ملاحظة هامة: يسمى الهرم الثلاثي المنتظم، **هرماً ثلاثياً منتظماً الوجوه**؛ إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع، ويكون أي منها قاعدة له.



Cone

المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة، ويتكون سطحه الجانبي من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته، والتي يعرف كل منها براسم المخروط.

Right circular cone

المخروط الدائري القائم

هو الجسم الذي ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة كمحور.

خواص المخروط الدائري القائم.

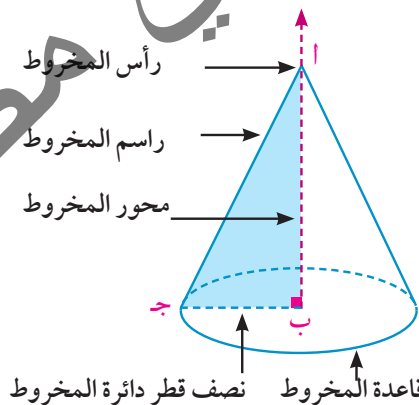
يوضح الشكل المقابل مخروطاً دائرياً قائماً، ناشئ من دوران المثلث

القائم الزاوية في ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ كمحور فنجد:

١ - أ ج راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة ج ترسم أثناء

الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوي طول

ب ج - وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط.

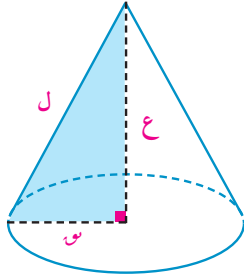


٢- $\overrightarrow{AB}$ محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة، ارتفاع المخروط يساوى طول $\overrightarrow{AB}$.

مثال

٢) مخروط دائرى قائم، طول راسمه ١٧ سم، وارتفاعه ١٥ سم، أوجد طول نصف قطر دائرته.

الحل



باعتبار طول الراسم = $ل$ ، ارتفاع المخروط = $ع$ ،

طول نصف قطر دائرة المخروط = $ن$

$$ل^2 = ع^2 + ن^2$$

$$17^2 = 15^2 + ن^2$$

$$ن = 8 \text{ سم}$$

٤) حاول أن تحل

٢) أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم.

فكر: $AB = AJ$ ، J منتصف AB إذا دار المثلث ABJ نصف دورة كاملة حول AJ كمحور. هل ينشأ مخروط دائرى قائم؟ فسر إجابتك.

شبكة المخروط القائم:

يمكن طى شبكة المخروط القائم؛ لتكوين عبوات مخروطية الشكل كما فى الشكل المقابل حيث:

١- $AB = AJ = L$ (طول راسم المخروط).

٢- القطاع الدائرى ABJ يمثل السطح الجانبي للمخروط، طول $BJ = \frac{1}{2} \pi r$

($ن$ طول نصف قطر قاعدة المخروط).

٣- ارتفاع المخروط = طول AN .

مثال

٣) يوضح الشكل المقابل شبكة مخروط قائم، مستعينا بالبيانات المعطاة، أوجد ارتفاعه. ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل

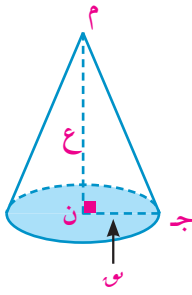
من شبكة المخروط نلاحظ أن:

طول راسم المخروط = طول $AM = 21$ سم

محيط قاعدة المخروط = طول $AB = 44$ سم.

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $جـ ن = 7$ سم.

عند طي شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل فيكون:



أي أن $ن = ٧$ سم

$$٤٤ = ٢٢ \pi \times ٧ \div ٢ \times ٢ \therefore$$

$$٤٤ = ٢٢ \pi \times ٧ \div ٢ \times ٢ \therefore$$

$$٤٤ = ٢٢ \pi \times ٧ \div ٢ \times ٢ \therefore$$

$\therefore$ ارتفاع المخروط الدائري القائم = ٢٧١٤ سم.

٤ حاول أن تحل

٢ في الشبكة السابقة للمخروط القائم، إذا كان $م = ٤١$ سم، طول $أب = ١٨ \pi$ سم أوجد ارتفاع المخروط.

تفكير ناقد: هل العبارة التالية صحيحة: "ارتفاع المخروط القائم < طول راسمه"؟ فسر إجابتك.

تمارين (٢ - ٣)

١ في الهرم الخماسي المنتظم:

أ ما عدد أوجهه الجانبية.

ب ما عدد الأوجه.

ج ما عدد أحرفه الجانبية.

د ما عدد أحرفه.

هـ للهرم رأس واحدة بخلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسي؟ هل تحقق إجابتك علاقة

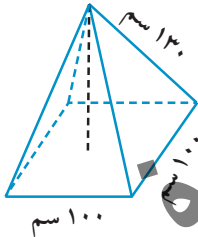
أويلر لأي مجسم قاعدته منطقة مضلعه. "عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"

٢ في الهرم المنتظم، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

أ طول الحرف الجانبي.

ب ارتفاع الهرم.

ج الارتفاع الجانبي.



٣ هندسة مدنية: يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعي منتظم مستعينا

بالبيانات المعطاة أوجد كلاً من ارتفاع الوجه الجانبي وارتفاع الخزان.

٤ الربط بالحوالة: خيمة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعها ١٦٠ سم

ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦ سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

٥ الربط بالسياحة: هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته

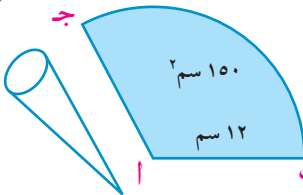
٢٣٢ مترًا، وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترًا، أوجد ارتفاع الهرم.

٦ الربط بالصناعة: تغلف الألبان المثلجة في مخروط دائري قائم بطي قطعة من

الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائري طول نصف قطره ١٢ سم

ومساحته ١٥٠ سم^٢ بحيث يتلامس نصفًا قطري دائرته $أب$ ، $أج$. أوجد ارتفاع

المخروط. [تذكر: مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ طول قوسه $\times$ طول نصف قطره دائرته].



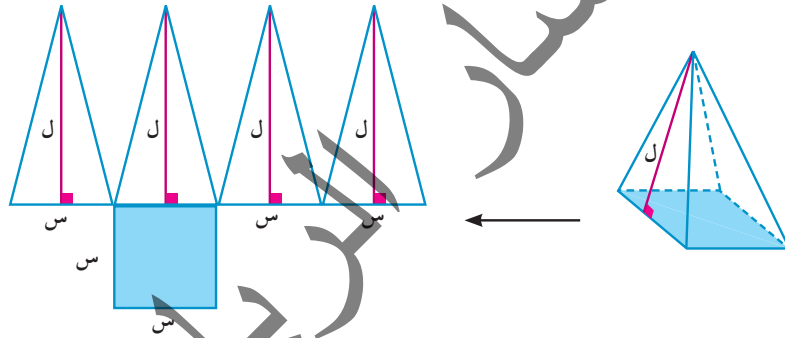
المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط

Surface area of pyramids and cones

سبق أن تعلمت خواص الهرم والمخروط الدائري القائم، وقمت باستنتاج بعضها من خلال شبكة كل منهما. هل يمكنك حساب المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم من شبكتهما؟ فسر إجابتك.

المساحة الكلية للهرم المنتظم

يوضح الشكل التالي هرمًا رباعيًا منتظمًا، وإحدى شبكاته.



لاحظ أن: الأوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة الارتفاعات الجانبية متساوية وكل منها l

قاعدة الهرم مضلع منتظم طول ضلعه s ويكون:

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

$$= \frac{1}{2} s \times l + \frac{1}{2} s \times l + \frac{1}{2} s \times l + \frac{1}{2} s \times l$$

$$= \frac{1}{2} (s + s + s + s) l$$

$$= \frac{1}{2} \text{ محيط قاعدة الهرم } \times \text{ الارتفاع الجانبي.}$$

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته.

تعلم



المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته $\times$ ارتفاعه الجانبي.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته.

سوف تتعلم

- إيجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن المساحة السطحية لكل من الهرم والمخروط القائم.

المصطلحات الأساسية

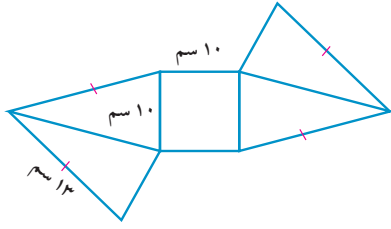
- المساحة الجانبية
- Lateral surface area (L.S.A)
- المساحة الكلية (السطحية)
- Total surface area (T.S.A)

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

مثال

١ باستخدام الشبكة التي أمامك. صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.



الحل

الشبكة لهرم رباعي منتظم.

قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠ سم ، طول حرفه الجانبي = ١٣ سم.

∴ الوجه الجانبي م أ ب مثلث متساوي الساقين ، م هـ ارتفاع جانبي.

∴ هـ منتصف أ ب أي أن أ هـ = ٥ سم

في ∆ م هـ أ القائم الزاوية في هـ نجد أن $(م هـ)^2 = (م أ)^2 - (أ هـ)^2$

$$(م هـ)^2 = (١٣)^2 - (٥)^2 = ١٤٤$$

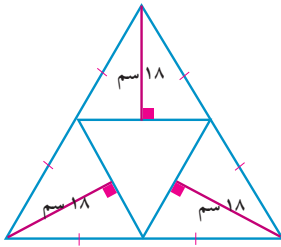
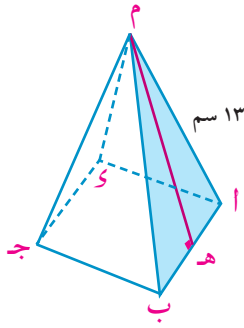
∴ م هـ = ١٢ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \frac{1}{2} \times (٤ \times ١٠) \times ١٢ = ٢٤٠ \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة قاعدة الهرم} = (١٠)^2 = ١٠٠ \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية للهرم} = ١٠٠ + ٢٤٠ = ٣٤٠ \text{ سم}^2$$



٤ حاول أن تحل

١ باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

المساحة الكلية للمخروط القائم

من شبكة المخروط القائم في الشكل المقابل

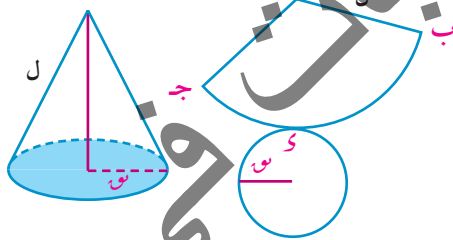
$$\text{مساحة القطاع أ ب ج} = \frac{1}{2} \times \text{أ ب} \times \text{طول ب ج}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{محيط قاعدة المخروط}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ل} \times 2\pi \text{ ر} = \pi \text{ ل ر}$$

$$= \text{المساحة الجانبية للمخروط القائم}$$

$$\text{المساحة الكلية للمخروط} = \text{المساحة الجانبية له} + \text{مساحة قاعدته}$$



تذكر أن

القطاع الدائري هـ س = $\frac{\text{ل}}{2\pi}$
محيط القطاع = ٢ نق + ل

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{نق}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{ل} \times \text{نق} = \frac{1}{4} \times \text{ل} \times 2\pi \text{ ر} = \frac{1}{2} \pi \text{ ل ر}$$

$$\text{المساحة الجانبية للمخروط القائم} = \pi \text{ ل ر}$$

$$\text{المساحة الكلية للمخروط القائم} = \pi \text{ ل ر} + \pi \text{ ر}^2 = \pi \text{ ر} (\text{ل} + \text{ر})$$

حيث ل طول راسمه ، ر طول نصف قطر دائرته.

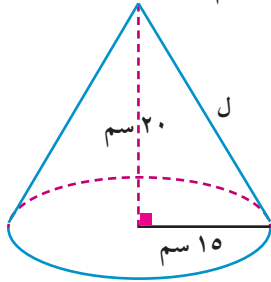
تعلم



مثال

٢ أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطره ١٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم.

الحل



$$\text{ل} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

$$\text{ل} = 25 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية للمخروط القائم} = \pi \times \text{ل} \times \text{نصف القطر} = \pi \times 25 \times 15$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية للمخروط القائم} = \pi \times 25 \times 15 = 375\pi \text{ سم}^2$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم.

مثال

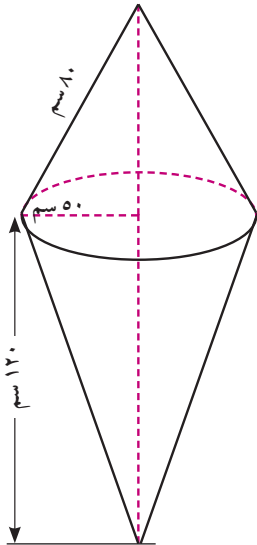
٣ **ملاحظة بحرية:** يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى

الملاحى، وهى على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.

أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية، علماً بأن تكاليف المتر المربع

الواحد منها ٣٠٠ جنيه.

الحل



مساحة سطح العلامة الإرشادية = المساحة الجانبية للمخروط الأول

+ المساحة الجانبية للمخروط الثانى.

$$\text{المخروط الأول: ل} = 80 \text{ سم ، نصف القطر} = 50 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \pi \times 80 \times 50$$

$$= 4000\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{المخروط الثانى: ع} = 120 \text{ سم ، نصف القطر} = 50 \text{ سم} \therefore \text{ل} = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \pi \times 130 \times 50$$

$$= 6500\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة سطح العلامة الإرشادية} = \pi(6500 + 4000) = 10500\pi \text{ سم}^2$$

$$\simeq 3,299 \text{ متر مربع}$$

$$\text{تكاليف الطلاء} = 3,299 \times 300 = 989,700 \text{ جنيهًا}$$

٤ حاول أن تحل

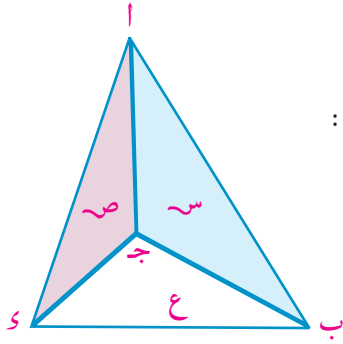
٣ غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط دائرته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم،

احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.





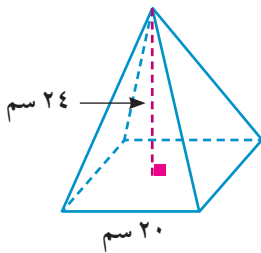
تمارين (٣ - ٣)



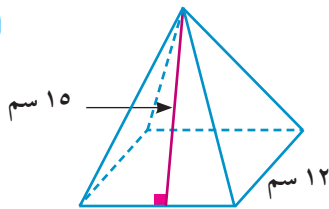
١ الشكل المقابل يمثل هرم ثلاثي، س، ص، ع ثلاث مستويات أكمل ما يأتي:

- أ س $\cap$ ص = ... ب س $\cap$ ع = ...
 ج ص $\cap$ ع = ... د $\overleftrightarrow{AB} \cap$ س = ...
 هـ $\overleftrightarrow{BC} \cap$ س، $\overleftrightarrow{BC} \cap$ ع
 و س $\cap$ ص $\cap$ ع = ...

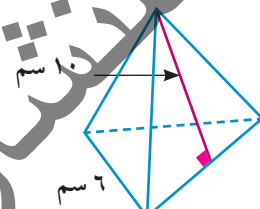
٢ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة.



ج

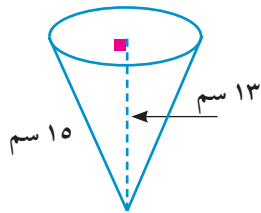


ب

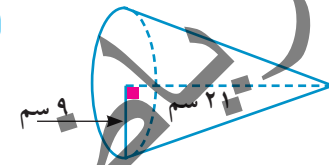


أ

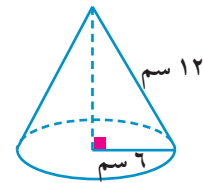
٣ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة.



ج



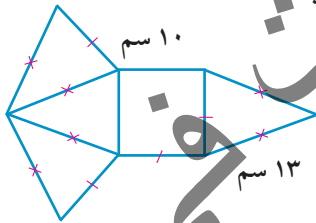
ب



أ

٤ هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي ١٠ سم. أوجد:

- أ مساحته الجانبية
 ب مساحته الكلية



٥ **الربط بالصناعة:** تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى

بطي شبكة المجسم المقابلة.

أ أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

ب احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهاً.

٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطره ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠°

لتصنع مخروطاً دائرياً قائماً. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ ، r طول نصف قطر دائرة القطاع، θ قياس زاويته المركزية بالراديان).

٧ أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥ سم، ومساحته الكلية 104π سم^٢.

حجم الهرم والمخروط القائم

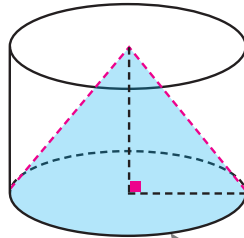
Volumes of pyramids and cones

فكر و ناقش



سبق أن تعلمت كيفية حساب حجم المنشور القائم وحجم الأسطوانة الدائرية القائمة.

هل تستطيع تقدير حجم الهرم بدلالة حجم المنشور القائم الذى له نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟



هل تستطيع تقدير حجم المخروط القائم بدلالة حجم أسطوانة لها نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟

نشاط



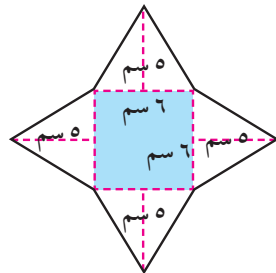
المقارنة بين حجمى هرم ومنشور لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع.

١- ارسم على ورق مقوى شبكتى الهرم والمنشور الموضحتين فى الرسم أمامك.

٢- اقطع واطو كل شبكة؛ لتصنع نموذجين أحدهما السطح الجانبي لهرم رباعى، والثانى منشور قائم مفتوح من أعلى.

٣- املاؤ الهرم بحبات الأرز أو الرمل، وأفرغوه فى المنشور، كرر ذلك حتى يمتلئ المنشور تمامًا.

لاحظ أن المحتويات (حبات الأرز أو الرمل) التى تلتزمك لملئ المنشور سوف تملأ تمامًا ثلاثة أهرامات.



أي أن حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور الذى له نفس مساحة قاعدة الهرم (ق) ونفس ارتفاع الهرم (ع).

سوف تتعلم

- إيجاد حجم الهرم المنتظم.
- إيجاد حجم المخروط القائم
- نمذجة وحل مشكلات رياضية
- وحياتية تتضمن حجم كل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.

المصطلحات الأساسية

Vertex	رأس
Base	قاعدة
Face	وجه
Axis	محور
Radius	نصف قطر
Volume	حجم

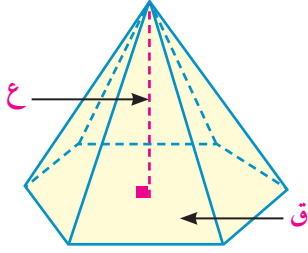
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

Volume of a Pyramid

حجم الهرم

تعلم



حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه.

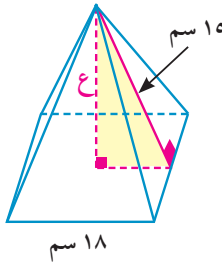
$$\text{أى أن: حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم.

مثال

١ احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلعه قاعدته ١٨ سم، وارتفاعه الجانبى ١٥ سم.

الحل



أولاً: حساب مساحة قاعدة الهرم (ق)

∴ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

$$\text{مساحة قاعدة الهرم (ق)} = 18 \times 18 = 324 \text{ سم}^2$$

ثانياً: حساب ارتفاع الهرم (ع)

$$\text{∴ } ع^2 = (9)^2 + (15)^2 \text{ فيثاغورث}$$

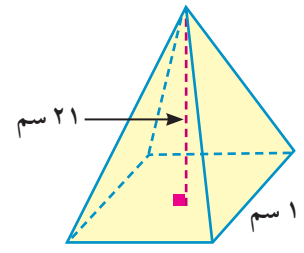
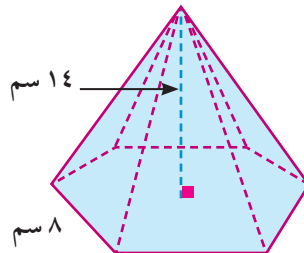
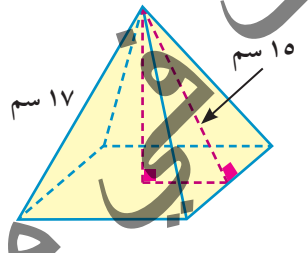
$$\text{∴ } ع^2 = (9)^2 - (15)^2 = 144, ع = 12 \text{ سم}$$

$$\text{∴ حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$\text{∴ حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 324 \times 12 = 1296 \text{ سم}^3$$

٤ حاول أن تحل

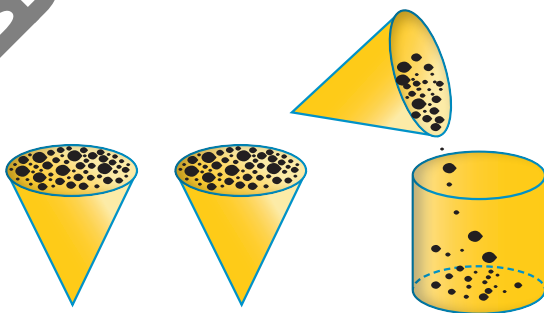
١ أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدماً البيانات المعطاة.



فكر: عند المقارنة بين حجمى مخروط دائرى قائم وأسطوانة قائمة لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع نجد أن:

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \times \text{حجم الأسطوانة.}$$

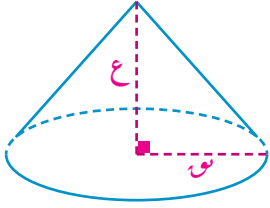
كيف تفسر ذلك رياضياً؟



تذكر أن

مساحة سطح مضلع منتظم
عدد أضلاعه ن، وطول ضلعه
س تساوى

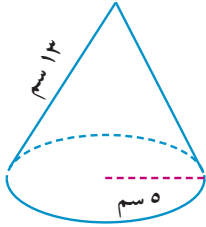
$$\frac{ن}{4} \text{ س}^2 \text{ ظنا } \pi$$



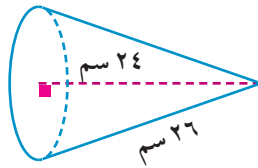
حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه
أى أن: حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi \text{نق}^2 \text{ع}$
 حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ، (ع) ارتفاع المخروط

حاول أن تحل

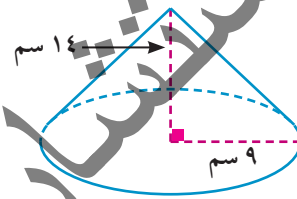
٢ أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدماً البيانات المعطاة.



ج



ب



أ

مثال

٢ **الربط بالفيزياء:** سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم ارتفاعه ٢,٤ سم، وطول نصف قطر دائرته ١,٥ سم. أوجد كثافة الذهب إذا كان كتلة السبيكة ١٩١ جم.

الحل

$$\therefore \text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \text{نق}^2 \text{ع} , \quad \text{نق} = ١,٥ \text{ سم} , \quad \text{ع} = ٢,٤ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{حجم الذهب فى السبيكة} = \frac{\pi}{3} (١,٥)^2 (٢,٤) = ٩,٨٩٦ \text{ سم}^3$$

$$\therefore \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}} = \text{الكثافة} \quad \therefore \text{كثافة الذهب} = \frac{١٩١}{٩,٨٩٦} \approx ١٩,٣ \text{ جم/سم}^3$$

حاول أن تحل

٢ قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم أوجد ارتفاعه.

مثال

٣ **الربط بالصناعة:** هرم خماسى منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠ سم، وارتفاعه ٤٢ سم، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم، طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم. فإذا علم أن ١٠٪ من النحاس فُقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

$$\therefore \text{مساحة الخماسى المنتظم} = \frac{5}{2} \text{س}^2 \text{ ظلنا } \frac{\pi}{5} \quad \text{حيث س طول ضلعه}$$

$$\therefore \text{مساحة قاعدة الهرم} = \frac{5}{2} \times ١٠ \times ١٠ \times \text{ظلنا } ٣٦^\circ = \frac{١٢٥}{٣٦} \approx ١٧٢ \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{3} \times 42 \times \frac{172}{3} = 2408 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{حجم النحاس في المخروط} = 2408 \times \frac{9}{100} = 2167,2 \text{ سم}^3$$

$$\frac{\pi}{3} (10)^2 \times \text{ع} = 2167,2 \quad \text{حيث ع ارتفاع المخروط القائم}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{3 \times 2167,2}{\pi \times 100} \approx 9,2 \text{ سم}$$

٥ حاول أن تحل

٤ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحوّل إلى مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢١ سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل.

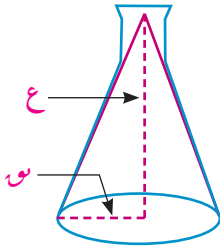
تذكر أن

السعة هي حجم الفراغ الداخلي لأي جسم أجوف

ملاحظة هامة: تقدر سعة حاوية بحجم السائل الذي تحتويه، ولحساب سعتها تستخدم نفس قوانين حساب الحجم، ووحدة قياس السعة هي اللتر.

$$١ \text{ لتر} = ١٠٠٠ \text{ مليلتر} = ١٠٠٠ \text{ سم}^3 = ١ \text{ ديسم}^3$$

مثال



٤ **الربط بالكيمياء:** دورق مخروطي الشكل سعته ١٥٤ مل. ارتفاعه ١٢ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته ($\frac{22}{7} \approx \pi$).

الحل

$$\text{سعة الدورق} = \text{حجم المخروط القائم} = 154 \text{ سم}^3$$

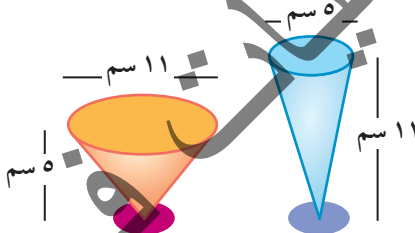
$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \text{ر}^2 \times 12 = 154 \quad \therefore \text{ر}^2 = \frac{154 \times 3 \times 7}{22 \times 12} = \frac{49}{4} \quad \therefore \text{ر} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ر} = 3,5 \text{ سم}$$

٥ حاول أن تحل

٥ أ، ب كأسان للشراب. أيهما سعته أكبر؟

أوجد الفرق بين سعتهما.

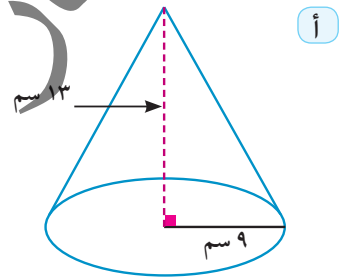
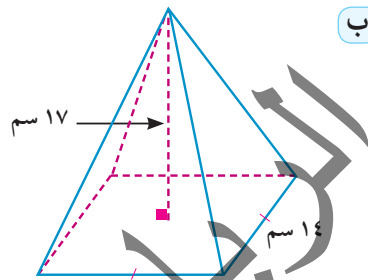
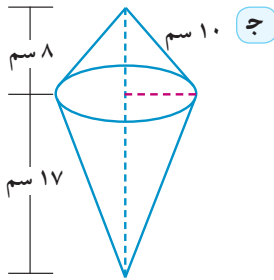




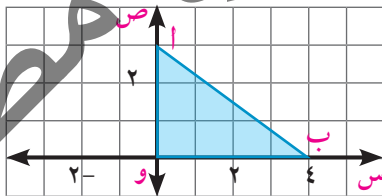
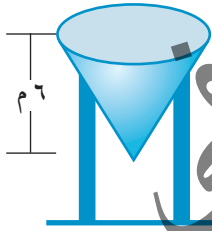
تمارين (٣ - ٤)



- ١ أوجد حجم هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ٣٦ سم.
- ٢ احسب لأقرب رقم عشري واحد، حجم هرم خماسي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٠ سم.
- ٣ هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٩ سم، وحجمه ٣٠٠ سم^٣. أوجد طول ضلع قاعدته.
- ٤ هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم^٢، وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم أوجد حجمه.
- ٥ أيهما أكبر حجمًا؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم.
- ٦ أوجد حجم مخروط قائم، محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم.
- ٧ أوجد حجم مخروط قائم، مساحته الجانبية ٢٢٠ سم وطول راسمه ١٤ سم.
- ٨ رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.



- ٩ **الربط بالسباحة:** صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٣،٢ جم/سم^٣. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١،٥ سم وارتفاعه ٧ سم، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشري واحد.
- ١٠ **الربط بالفيزياء:** إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدني على شكل مخروط قائم، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملاً، فارتفع سطح الماء في الإناء بمقدار ١ سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء.
- ١١ **هندسة مدنية:** صهريج مياه على شكل مخروط قائم، حجمه ٣٢ π م^٣ وارتفاعه ٦ م. أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.



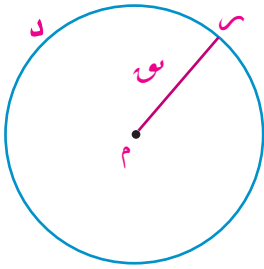
- ١٢ يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و، دورة كاملة حول:
 - أ محور السينات.
 - ب محور الصادات.
- ١٣ **تفكير إبداعي:** مخروط دائري، قائم حجمه ١٠٠ سم^٣. أوجد حجمه عندما:
 - أ يتضاعف ارتفاعه.
 - ب يتضاعف طول نصف قطره.
 - ج يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

معادلة الدائرة

Equation of a circle

تمهيد

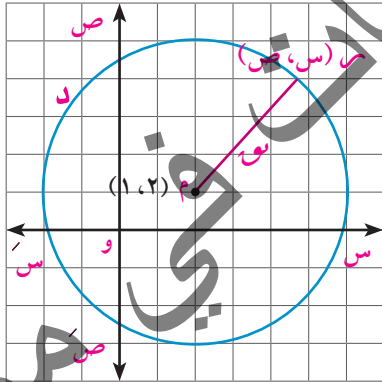
علمت أن الدائرة هي مجموعة نقط المستوى التي تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة في المستوى.



تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويرمز لها عادة بالرمز م ، كما يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز r. كما يرمز للدائرة عادة بالرمز د.

معادلة الدائرة:

معادلة الدائرة هي علاقة بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لأي نقطة تنتمي للدائرة، وكل زوج مرتب (س ، ص) يحقق هذه العلاقة (المعادلة) يمثل نقطة تنتمي إلى هذه الدائرة.



في مستوى إحداثي متعامد

إذا كانت النقطة م (س ، ص) تنتمي لدائرة د طول نصف قطرها يساوي ٤ وحدات ومركزها النقطة م (١ ، ٢) فإن:

$$م = ر = ٤$$

وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين تكون:

$$(س - ٢) + (ص - ١) = ٤$$

$$١٦ = (س - ٢) + (ص - ١)$$

هي معادلة الدائرة د

تذكر أن

$$\sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} = \text{البعد بين النقطتين}$$

سوف تتعلم

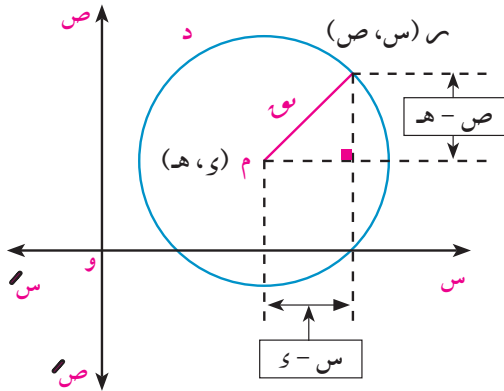
- كتابة معادلة الدائرة بدلالة إحداثي مركزها وطول نصف قطرها.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- تعيين إحداثي مركز دائرة وطول نصف قطرها. من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن معادلة الدائرة.

المصطلحات الأساسية

Circle	دائرة
Center	مركز
Radius	نصف قطر
Diameter	قطر
	مستوى إحداثي
Cartesian plane	
Equation	معادلة
General Form	صورة عامة

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق مربعات



The equation of a circle

معادلة الدائرة

(بدلالة إحداثيي مركزها وطول نصف قطرها)

في مستوى إحداثي متعامد:

إذا كانت النقطة س (س ، ص) تنتمي إلى دائرة د مركزها النقطة م (هـ ، ك) وطول نصف قطرها يساوي ر من الوحدات، فإن معادلة الدائرة د هي:

$$(س - هـ)^2 + (ص - ك)^2 = ر^2$$

مثال

١) اكتب معادلة الدائرة د مركزها النقطة م (٥ ، ٢)، وطول نصف قطرها يساوي ٦ وحدات.

الحل

بفرض أن النقطة س (س ، ص) ∈ الدائرة د

∴ مركز الدائرة م (٥ ، ٢) ، طول نصف قطر الدائرة = ٦ وحدات

∴ ٥ = هـ ، ٢ = ك ، ٦ = ر

وتكون معادلة الدائرة هي (س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٦^٢ أي: (س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٣٦

٩ حاول أن تحل

١) اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها:

أ) م (٤ ، -٣) ، وطول نصف قطرها يساوي ٥ وحدات.

ب) م (٧ ، -١) ، وطول قطرها يساوي ٨ وحدات.

ج) م (٢ ، ٠) ، وطول قطرها يساوي ٢√٨ من الوحدات.

د) م (٠ ، ٥) ، وتمر بالنقطة أ (-٢ ، ٩)

هـ) نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي ر من الوحدات.

مثال

٢) يبين الشكل المقابل الدائرتين د_١ ، د_٢ أثبت أن الدائرتين متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما.

الحل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولاهما نصفى قطريهما.

الدائرة د_١: مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها ر_١ = ٢ وحدة.

الدائرة د_٢: مركزها (٢ ، ٥) وطول نصف قطرها ر_٢ = ٢ وحدة

∴ ر_١ = ر_٢ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

وتكون: معادلة د_١ $s^2 + v^2 = 4$ ، معادلة د_٢ $(s-5)^2 + (v-2)^2 = 4$

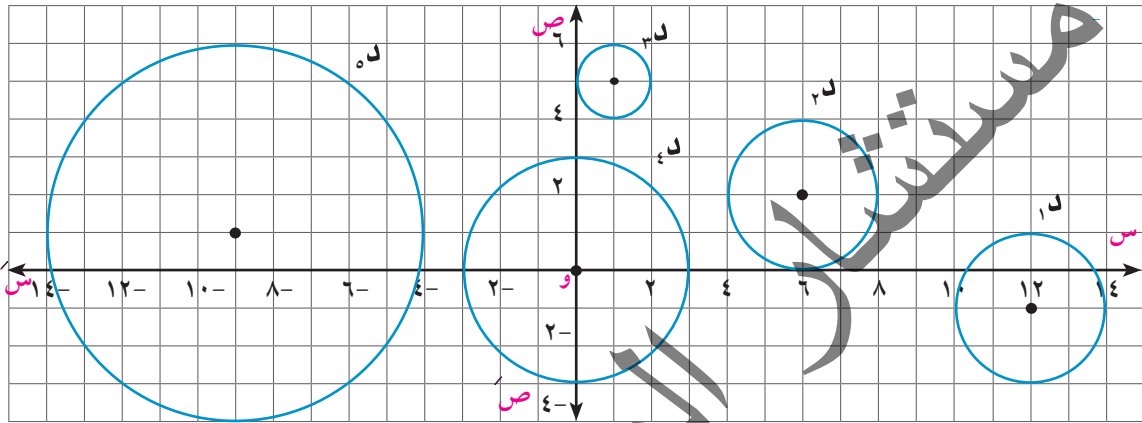
لاحظ: الدائرة د_١ هي صورة الدائرة د بالانتقال (٢ ، ٥)

تفكير ناقد: إذا كانت الدائرة د_٣ هي صورة الدائرة د بالانتقال (٣ ، -٤)

فأكتب معادلة الدائرة د_٣.

٤ حاول أن تحل

٢ اكتب معادلة كل دائرة في الشكل التالي



ب أي الدوائر السابقة متطابقة؟ فسر إجابتك.

فكر: أين تقع النقطة (س_١ ، ص_١) بالنسبة للدائرة د: $(s-5)^2 + (v-2)^2 = 4$ إذا كان:

أ $(s-5)^2 + (v-2)^2 < 4$ **ب** $(s-5)^2 + (v-2)^2 = 4$ **ج** $(s-5)^2 + (v-2)^2 > 4$

مثال

٣ بين أن النقطة (٤ ، -١) هي إحدى نقط الدائرة د التي معادلتها: $(s-3)^2 + (v-5)^2 = 37$

الحل

بالتعويض بإحداثيي النقطة (٤ ، -١) في الطرف الأيمن لمعادلة الدائرة.

$$\therefore (s-3)^2 + (v-5)^2 = 37 = 36 + 1 = (5-1)^2 + (3-4)^2$$

∴ النقطة (٤ ، -١) تنتمي إلى الدائرة د

لاحظ أن: للنقطة (س_١ ، ص_١) في مستوى الدائرة

إذا كان $(s-3)^2 + (v-5)^2 < 37$ فإن النقطة (س_١ ، ص_١) تقع خارج الدائرة د.

وإذا كان $(s-3)^2 + (v-5)^2 > 37$ فإن النقطة (س_١ ، ص_١) تقع داخل الدائرة د.

٤ حاول أن تحل

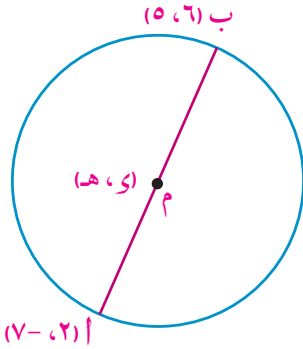
٣ بين أي النقط التالية تنتمي إلى الدائرة د التي معادلتها: $(s-6)^2 + (v+1)^2 = 25$ ، ثم حدد موضع النقط

الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث:

أ (٩ ، ٣) ، ب (٧ ، ٥) ، ج (٣ ، ٣) ، د (٢ ، -٣)

تذكر أن

إحداثي منتصف المسافة
بين النقطتين (س_١، ص_١)
(س_٢، ص_٢) = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}, \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$



مثال

٤ اكتب معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{AB}$ حيث أ(٢، -٧)، ب(٦، ٥)

الحل

بفرض أن النقطة م(س، هـ) مركز للدائرة التي قطرها $\overline{AB}$ ، فتكون النقطة م منتصف $\overline{AB}$

$$\therefore \text{إحداثيات م: } س = \frac{٦ + ٢}{٢} = ٤, \quad هـ = \frac{٥ + (-٧)}{٢} = -١$$

$$٢(س - ٤) + ٢(ص + ١) = ٢(٦ - ٥) + ٢(٢ - (-٧))$$

$$٤٠ = ٢(٦) + ٢(٢) =$$

وتكون معادلة الدائرة هي: (س - ٤) + (ص + ١) = ٢٠

$$\text{أي } ٤٠ = ٢(٤ + ١) + ٢(٤ - ١)$$

فكر: هل تحقق النقطة (٥، ٦) معادلة الدائرة؟ لماذا؟

هل تنتمي النقطة (٦، -٧) للدائرة السابقة فسر إجابتك.

٥ حاول أن تحل

٤ اكتب معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م(٢، -٧)، وتمر بالنقطة أ(٢، ١٠)

ب مركزها النقطة م(٥، ٤)، وتمس المستقيم س = ٢

ج مركزها م يقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي، وطول نصف قطرها يساوي ٣ وحدات، والمستقيمان س = ١، ص = ٢ مماسان لها.

مثال

٥ أوجد إحداثي المركز، وطول نصف قطر كل من الدائرتين:

$$\text{أ } (س - ٢) + (ص + ٣) = ١٧ \quad \text{ب } (س + ١) + (ص + ٢) = ١٦$$

الحل

نعلم أن معادلة الدائرة بدلالة إحداثي المركز (س، هـ) وطول نصف قطرها م هي:

$$(س - س) + (هـ - هـ) = م^2$$

بمقارنة كل مقدار جبري في المعادلة بنظيره في المعادلات المعطاة نجد:

$$\text{أ } س - س = س - ٢, \quad هـ - هـ = ص + ٣$$

$$\therefore س = ٢, \quad هـ = ٣$$

$$\therefore م = \sqrt{١٧}$$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢، ٣) وطول نصف قطرها يساوي $\sqrt{١٧}$ وحدة.

ب) س - ٥ = س + ١
ص - هـ = ص
١٦ = ٢
١٠ = ٥
٠ = هـ
٤ = ٢
∴ مركز الدائرة النقطة (١٠ ، ١٠) وطول نصف قطرها يساوي ٤ وحدات.

٤ حاول أن تحل

٥) أي من الدوائر المعطاة يمثل دائرة مركزها (٣ ، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.
أ) (س - ٣) + (ص - ٤) = ٩
ب) (س + ٣) + (ص - ٤) = ٩
ج) (س - ٣) + (ص + ٤) = ٩
د) (س + ٣) + (ص + ٤) = ٩
٦) أوجد إحداثي المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:-
أ) (س - ٣) + (ص + ٥) = ١٥
ب) (س + ٤) + (ص + ٢) = ٩
ج) (س + ١) + (ص + ٧) = ٢
د) (س + ١) + (ص - ١٣) = ٢

تعلم

General form of the equation of a circle

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

علمت أن معادلة الدائرة التي مركزها (س ، هـ) وطول نصف قطرها يساوي ١٠ من الوحدات هي: (س - ٥) + (ص - ٥) = ١٠
∴ س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = ٠
المقدار س^٢ - ١٠س + ٢٥ = ٠ هو مربع كامل حيث (ج = ٥)
بوضع ل = س - ٥ ، ك = هـ - ٥ ، ج = ٥
تصبح المعادلة (١) على الصورة

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل + ٢ك + ج = ٠$$

وتسمى بالصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (ل- ، ك-) وطول نصف قطرها يساوي ١٠ حيث
١٠ = √(ل^٢ + ك^٢ - ج) ، ل^٢ + ك^٢ - ج > ٠

مثال

٦) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٦ ، ٣) وطول نصف قطرها يساوي ٥ وحدات.

الحل

∴ مركز الدائرة (ل- ، ك-) في الصورة العامة لمعادلة الدائرة

مركز الدائرة (٦ ، ٣) معطى

$$ل = ٦ ، ك = ٣$$

$$٥ = ١٠ ، ج = ٥ - ٢ل + ٢ك = ٥ - ١٢ + ٦ = -١$$

$$∴ ج = -١ = ١ - ٢(٣) - ٢(٥) = ٢٠$$

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي: $س^٢ + ص^٢ - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠$ صفر.
يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام معادلة الدائرة: $(س - ٦) + (ص - ٣) = ٢٥$ ثم تبسيطها ومقارنة النتائج

٩ حاول أن تحل

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م $(٢ - ، ٥)$ ، وطول نصف قطرها يساوي $٥\sqrt{٢}$ وحدة.

ب مركزها النقطة ن $(٥ ، ٣ -)$ ، وتمر بالنقطة ب $(٢ ، ١)$.

مثال

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة إذا كانت النقطتان أ $(٤ ، ٢)$ ، ب $(١ - ، ٣ -)$ طرفي قطر فيه.

الحل

بفرض ان النقطة م $(ل - ، ك -)$ مركز للدائرة التي قطرها $\overline{أب}$

$\therefore$ م منتصف $\overline{أب}$ ويكون إحداثيا النقطة م هما $(\frac{١-٤}{٢} ، \frac{٣-٢}{٢})$

$$\frac{٣}{٢} = ل - \quad \text{أى} \quad ل = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} = ك - \quad \text{أى} \quad ك = \frac{١}{٢}$$

بالتعويض عن ل ، ك في الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$$

$$\therefore س^٢ + ص^٢ - ٣س + ص + ج = ٠$$

$\therefore$ الدائرة تمر بالنقطة أ $(٤ ، ٢)$ فهي تحقق معادلتها

$$\therefore ١٠ = ج + ٢ + (٤)٣ - ٢(٢) + ٢(٤) \quad \text{أى} \quad ج = -١٠$$

بالتعويض في المعادلة (١)

$\therefore$ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ص - ١٠ = ٠$ صفر.

٩ حاول أن تحل

٨ إذا كانت النقط أ $(٣ - ، ٢)$ ، ب $(٣ ، ٨)$ ، ج $(١ - ، ٠)$ تنتمي إلى دائرة واحدة. فأثبت أن $\overline{أب}$ قطر فيها، ثم

اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

ملاحظة هامة

من الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$$

أولاً: المعادلة من الدرجة الثانية في س ، ص

ثانياً: معامل $س^٢ = ١$ معامل $ص^٢ = ١$ الوحدة

ثالثاً: خالية من الحد الذي يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠

ولكى تمثل معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص دائرة يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة

وأن يكون $ل^٢ + ك^٢ - ج > ٠$



تعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها

لتعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها:

١- تحقق أولاً من وضع المعادلة في الصورة العامة **حيث** معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة

٢- احداثيا المركز (-ل، -ك) **أي** $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢}, \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

٣- طول نصف قطر الدائرة يساوي **حيث** $\text{نق} = \sqrt{\frac{\text{معامل س}^٢ + \text{معامل ص}^٢}{٢}}$ ، ل^٢ + ك^٢ - ج > ٠

مثال

٨) أي المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ وإذا كانت معادلة دائرة أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $٣س^٢ + ٢ص^٢ + ٢س - ٨ص - ١٠ = ٠$ ب $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٤س + ٢٥ = ٠$

ج $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ١٢س + ٨ص - ٣٠ = ٠$ د $٤س^٢ + ٤ص^٢ = ٤٩$

هـ $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٢س + ٣ = ٠$ صفر

الحل

أ معامل س^٢ ≠ معامل ص^٢ ∴ المعادلة ليست لدائرة

ب معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوي على س ص

ل = $\frac{٤}{٢} = ٢$ ، ك = $\frac{٠}{٢} = ٠$ ، ج = ٢٥

∴ ل^٢ + ك^٢ - ج = ٢ + ٠ - ٢٥ = -٢٣ < ٠ ∴ المعادلة ليست لدائرة

ج بقسمة طرفي المعادلة على ٢ ∴ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = ١ ، المعادلة خالية من الحد المحتوي على س ص

∴ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوي على س ص

ل = ٣ ، ك = ٢ ، ج = -١٥

∴ ل^٢ + ك^٢ - ج = ٩ + ٤ - (-١٥) = ٢٨ > ٠

∴ المعادلة لدائرة مركزها (٣، -٢) ، نق = $\sqrt{\frac{٢٨}{٢}} = \sqrt{١٤}$ وحدة

د بقسمة طرفي المعادلة على ٤ ∴ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = ١ ، المعادلة خالية من الحد المحتوي على س ص

∴ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوي على س ص

ل = ٠ ، ك = ٠ ، ج = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ ل^٢ + ك^٢ - ج = ٠ + ٠ - $\frac{٤٩}{٤} = -\frac{٤٩}{٤} < ٠$ ∴ المعادلة لدائرة مركزها نقطة الأصل ، نق = $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{\sqrt{٤٩}}{٢}$ وحدة

هـ المعادلة تحتوي على س ص ∴ المعادلة ليست دائرة

حاول أن تحل

٩) أي المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ وإذا كانت معادلة دائرة، أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س + ٤ص + ١٧ = ٠$ ب $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٤س - ٢ص = ٠$

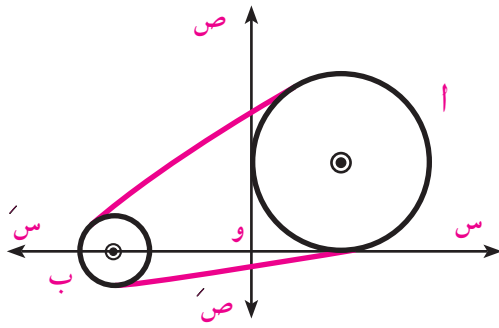
ج $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س + ٣٩ = ٠$ د $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٢س - ٦ = ٠$

تفكير ناقد: هل الدائرتان د: $س^2 + ص^2 - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠$

د: $س^2 + ص^2 + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$ متماستان من الخارج؟ فسر إجابتك.

مثال

نمذجة مواقف رياضية وحياتية



٩ **الربط بالصناعة:** يوضح الشكل المقابل بكرة أ في آلة تمس

محورى الإحداثيات، تدور بواسطة سير، يمر على بكرة

صغيرة ب معادلة دائرتها: $س^2 + ص^2 + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$ أوجد:

أ) معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

ب) البعد بين مركزي البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثي تمثل ٦ سم.

الحل

أ) البكرة أ تمس محورى الإحداثيات، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

∴ مركز دائرتها النقطة م (٥، ٥)

∴ ج = $ل^2 + ك^2 - ٢ل٠ - ٢ك٠ = ٢٥$

∴ ج = $٢(٥) - ٢(٥) + ٢(٥) = ٢٥$

وتكون معادلتها: $س^2 + ص^2 - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠$ صفر

ب) ∴ معادلة دائرة البكرة ب: $س^2 + ص^2 + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$

∴ $ل = ٧$ ، $ك = ٠$ ، $ج = ٤٥$ ، $ل٠ = ٢٠$ ، $ك٠ = ٠$

ويكون مركزها النقطة ن (٧، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة

∴ البعد بين مركزي البكرتين = م ن = $\sqrt{٢(٥) + ٢(٧+٥)} = ١٣$ وحدة

∴ كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٦ سم

∴ البعد بين البكرتين = $١٣ \times ٦ = ٧٨$ سم

٩ **حاول أن تحل**

١٠ **الربط بالطرق:** يوضح الشكل المقابل مقطعاً رأسياً في أحد الأنفاق

الدائرية لمرور السيارات معادلة دائرته:

$س^2 + ص^2 - ٤س - ٦ص - ١٢ = ٠$ ، أ ب قطر فيها.

أوجد أقصى ارتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال في المستوى

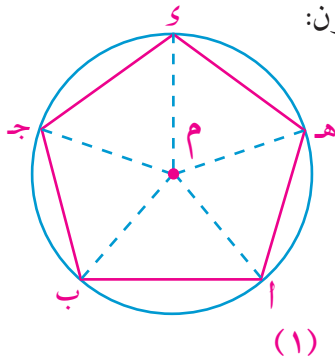
الإحداثي تمثل ٧٠ سم.

مثال

١٠ **الربط بالهندسة:** أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة:

$س^2 + ص^2 + ١٢س - ٦ص + ٥ = ٠$ علماً بأن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٥ سم.

الحل



بفرض أن م مركز الدائرة المارة برؤوس الخماسي المنتظم أ ب ج د هـ فيكون:

أ ب = ب ج = ج د = د هـ = هـ أ (وهي أوتار في الدائرة م)

$$\therefore \angle أ م ب = \angle ب م ج = \angle ج م د = \angle د م هـ = \angle هـ م أ = \dots = \angle أ م ب = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

ويلاحظ تقسيم الشكل أ ب ج د هـ إلى ٥ مثلثات متطابقة

أي أن مساحة الخماسي المنتظم = ٥ × مساحة $\triangle م أ ب$

$$= ٥ \times \frac{1}{2} \times م أ \times م ب \text{ جا } 72^\circ$$

$$= \frac{5}{2} \times م أ^2 \text{ جا } 72^\circ$$

من معادلة الدائرة: ل = ٣ ، ك = ٦ ، ج = ٥

$$\therefore م أ^2 = ل^2 + ك^2 - ج^2 = 3^2 + 6^2 - 5^2 = 9 + 36 - 25 = 20$$

$\therefore$ مساحة الخماسي المنتظم = $\frac{5}{2} \times (20) \text{ جا } 72^\circ = 10.565, 90$ وحدة مربعة

$\therefore$ كل وحدة طول في المستوى الإحداثي تمثل ٥ سم

$\therefore$ الوحدة المربعة في المستوى الإحداثي تمثل مساحة قدرها $(٥)^2 = ٢٥$ سم^٢

وتكون مساحة الخماسي المنتظم = $10.565, 90 \times 25 \approx 264.14$ سم^٢

تذكر أن

مساحة أي مضلع منتظم =

$$\frac{٣٦٠}{٢} \text{ جا } \frac{٣٦٠}{٢}$$

حيث م، نصف قطر الدائرة
المر بـ رؤوسه، م عدد أضلاع
المضلع.

تمارين (٣ - ٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) النقطة (٢، ٠) تقع على

- أ) محور السينات ب) محور الصادات ج) المستقيم ص = ٢ د) الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٩

٢) إذا كانت أ (٣، -٧) ، ب (-٣، ٥) فإن إحداثيي النقطة التي تنصف أ ب هما

- أ) (١، ٠) ب) (٠، ١) ج) (٠، -١) د) (-١، ٠)

٣) المسافة بين النقطتين (٢، ٤) ، (١٠، -٢) تساوي

- أ) ٩ ب) ١٠ ج) $\sqrt{104}$ د) ٦

٤) الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٥ مركزها (٠، ٠) وتمر بالنقطة

- أ) (٤، ١) ب) (٠، ٥) ج) (٠، ٢٥) د) (١، ٥)

٥) معادلة الدائرة التي مركزها (٣، -٥) وطول نصف قطرها يساوي ٧ وحدات هي:-

- أ) (س - ٣) + (ص - ٥) = ٤٩ ب) (س + ٣) + (ص - ٥) = ٤٩

- ج) (س + ٣) + (ص - ٥) = ٤٩ د) (س - ٣) + (ص - ٥) = ٤٩

٦ محيط الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = ٨$

٥ $\pi \sqrt{٢٤}$

ج $\pi \sqrt{٢٢}$

ب $\pi ٦٤$

أ $\pi ٨$

٧ اكتب معادلة الدائرة التي مركزها م وطول نصف قطرها هو، إذا كان:

ب م $(٠, ٠)$ ، هو $٤ =$

أ م $(٣, ٢)$ ، هو $٥ =$

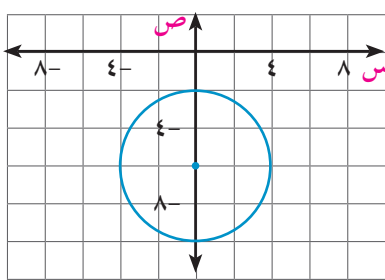
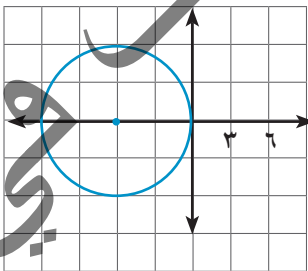
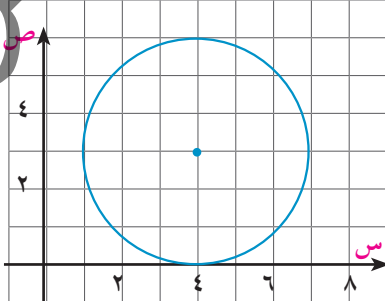
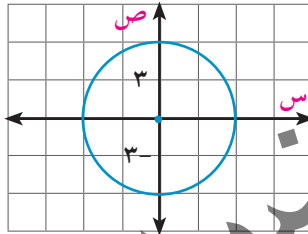
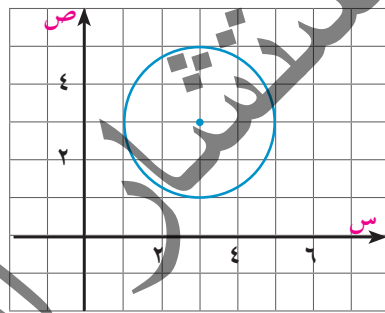
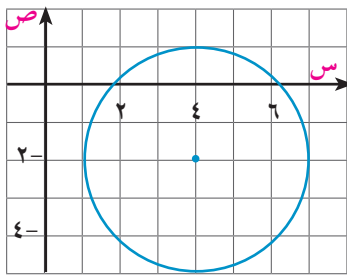
د م $(٤, -٥)$ ، هو $\sqrt{٧} =$

ج م $(٣, ٠)$ ، هو $٦ =$

و م $(٤, -٣)$ ، هو $\frac{٣}{٢} =$

هـ م $(٠, -١)$ ، هو $\sqrt{٢٣} =$

٨ اكتب معادلة الدائرة التي يمثلها الرسم المعطى



٩ أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م $(٧, -٥)$ ، وتمر بالنقطة أ $(٣, ٢)$.

ب $\overline{أب}$ قطر في الدائرة حيث أ $(٦, -٤)$ ، ب $(٠, ٢)$.

ج مركزها النقطة $(٥, -٣)$ ، وتمس محور السينات.

١٠ أوجد إحداثيي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

- أ $س^2 + ص^2 = 27$ ب $(س + 3)^2 + (ص - 5)^2 = 49$
ج $(س - 2)^2 + ص^2 = 16$ د $س^2 + (ص + 7)^2 = 24$

١١ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة في الحالات الآتية:

- أ مركزها م(٣، ١)، وطول قطرها يساوي ٨. ب مركزها م(٠، ٠)، وتمر بالنقطة أ(١، -٣)
ج مركزها م(٠، -٥)، وتمر بالنقطة ب(٣، ٤) د $\overline{AB}$ قطر فيها حيث أ(٣، -٧)، ب(٥، ١)

١٢ أوجد إحداثيي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

- أ $س^2 + ص^2 - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$ ب $س^2 + ص^2 + ٢س - ٨ = ٠$
ج $س^2 + ص^2 - ٦س + ١٠ص = ٠$ د $س^2 + ص^2 - ٨س - ١٢ = ٠$

١٣ بين أي دائرتين مما يلي متطابقتان

- أ $س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠$ ب $س^2 + ص^2 - ١٤س + ٣٧ = ٠$
ج $س^2 + ص^2 + ٢س - ٦ص - ١١ = ٠$ د $س^2 + ص^2 + ١٠س - ١٣ = ٠$

١٤ بين أي المعادلات الآتية لدائرة، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

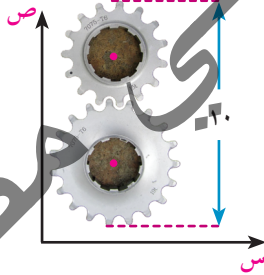
- أ $س^2 + ص^2 + ٢س - ٨س - ١٦ص - ١ = ٠$ ب $س^2 + ص^2 + ٢س - ٦ص - ٥ = ٠$
ج $\frac{١}{٤}س^2 + \frac{١}{٤}ص^2 + ٨س - ٨ = ٠$ د $س^2 + ص^2 + ٢س - ١٢ص - ١٢ = ٠$
هـ $س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠$ و $س^2 + ص^2 + ٢س - ٣ص - ٨ = ٠$

١٥ **الملاحظة البحرية:** يقع رادار عند الموقع أ(٧، -٩) ويغطي منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوي ٣٠ وحدة

طول. اكتب معادلة الدائرة التي تحدد مجال عمل الرادار في المستوى الإحداثي. هل يمكن للرادار رصد سفينة في الموقع ب(٢٥، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

١٦ **التصميم المعماري:** صمم مهندس معماري مبنى قاعدته على شكل ثماني منتظم، تمر رؤوسه بالدائرة

$س^2 + ص^2 - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠$ احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة.



١٧ **الصناعة:** يبين الشكل المقابل ترسين في آلة مركزيهما يقعان على مستقيم يوازي

محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات. أوجد معادلة الترس الأصغر

علماً بأن معادلة الترس الأكبر هي: $س^2 + ص^2 - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠$

١٨ **تفكير ابداعي:** أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين أ(١، ٣)، ب(٢، -٤) ويقع مركزها على محور

السينات.

ملخص الوحدة

مفاهيم ومسلمات

المستقيم: أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستقيم وحيد.

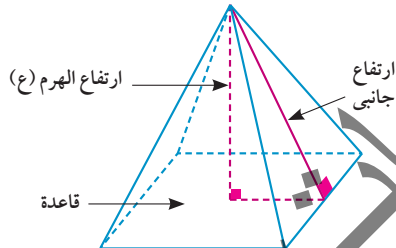
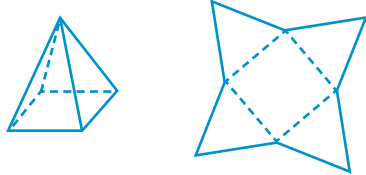
المستوى هو سطح لا حدود له، بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح.

الفراغ هو مجموعة غير منتهية من النقاط، ويحتوى جميع الأشكال والمستويات والمجسمات، ويحتوى الفراغ على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

العلاقة بين مستقيمين مختلفين فى الفراغ (١) متقاطعان: إذا تقاطعا فى نقطة واحدة. (٢) متوازيان: إذا وقعا فى مستوى واحد ولم يتقاطعا. (٣) متخالفان: لا يجمعهما مستوى واحد (غير متقاطعين وغير متوازيين).

العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ: (١) المستقيم يقطع المستوى فى نقطة. (٢) المستقيم يقع بتمامه فى المستوى. (٣) المستقيم لا يشترك مع المستوى فى أى نقطة وفى هذه الحالة يكون المستوى والمستقيم متوازيان.

العلاقة بين مستويين مختلفين فى الفراغ: (١) يتقاطعان فى خط مستقيم. (٢) المستويان متوازيان. (٣) المستويان منطبقان **شبكة الجسم** هى شكل ذو بعدين يمكن طيه؛ ليكون شكلاً ثلاثي الأبعاد.



الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة. ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته فيكون هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا.. وهكذا.

الهرم المنتظم هرم قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها فنجد:

◀ أحرفه الجانبية متساوية فى الطول.

◀ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.

◀ الارتفاعات الجانبية متساوية

الهرم القائم يكون الهرم قائمًا إذا وفقط إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي.

المخروط الدائري القائم هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته $\times$ ارتفاعه الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته.

المساحة الجانبية للمخروط القائم = $\pi r l$ حيث l طول راسمه، r طول نصف قطر قاعدته.

المساحة الكلية للمخروط القائم = $\pi r l + \pi r^2$ ، πr^2 (ل + πr^2).

حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته $\times$ ارتفاعه.

حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته $\times$ ارتفاعه.

الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

معادلة الدائرة: معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (س، هـ) وطول نصف قطرها يساوى ρ هى: $(س - هـ)^2 + (س - ل)^2 = \rho^2$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة: الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها النقطة (ل، ك) وطول نصف قطرها يساوى ρ هى: $ل^2 + ك^2 + ٢ل + ٢ك + ج = صفر$

حيث $\rho = \sqrt{ل^2 + ك^2 - ج}$ ، $ل^2 + ك^2 - ج > ٠$

لتعيين إحداثى مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

تحقق أولاً من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث: معامل س = معامل ص = الوحدة

إحداثيا المركز (ل، ك) أى $(\frac{-معامل س}{٢}, \frac{-معامل ص}{٢})$

طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة $\rho = \sqrt{ل^2 + ك^2 - ج}$ ، حيث $ل^2 + ك^2 - ج > ٠$



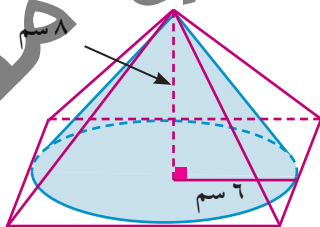
تمارين عامة (الوحدة الثالثة)



أكمل كل ممايأتى:

- ١ يتحدد المستقيم تحديداً تاماً إذا علم عليه
- ٢ المستقيمان المتخالفان لا يمكن أن يحتويهما
- ٣ يكون المستويان منطبقان إذا اشتركا فى
- ٤ الأوجه الجانبية فى الهرم المنتظم
- ٥ الارتفاعات الجانبية فى الهرم المنتظم
- ٦ ارتفاع المخروط القائم طول راسمه
- ٧ حجم الهرم = ... $\times$
- ٨ طول نصف قطر الدائرة س $+ ٢$ ص $- ١٨ = ٠$ يساوى
- ٩ معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٢، ٣) وطول نصف قطرها ٤ وحدات هى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة مستعيناً بالشكل المقابل:



١٠ المستقيمان المتخالفان:

- أ لا يتقاطعان. ب لا يتعامدان.
ج لا يتوازيان. د لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

١١ المساحة الجانبية للمخروط القائم تساوى سم ^{2}

٥ $\pi ٤٨$

ج ٤٨

ب $\pi ٦٠$

أ ٦٠

- ١٢) المساحة الكلية للهرم المنتظم تساوي سم^٢
 أ) ٣٦٠ ب) ٢٤٠ ج) ٣٨٤ د) ٤٣٢
- ١٣) حجم الهرم يساوي سم^٣
 أ) ٦٤ ب) ٩٦ ج) ٤٨٠ د) ٣٨٤
- ١٤) النسبة بين حجم الهرم إلى حجم المخروط تساوي:
 أ) $\pi : 3$ ب) $\pi : 4$ ج) $4 : \pi$ د) $3 : \pi$

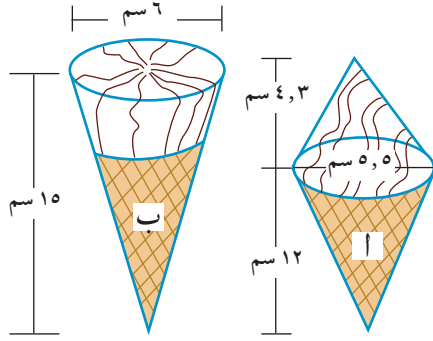
أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١٥) هرم منتظم حجمه ١٢ سم^٣ ومساحة قاعدته ٤ سم^٢. احسب ارتفاعه.
- ١٦) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم. احسب مساحته الجانبية.
- ١٧) مخروط دائري قائم حجمه ٩٦ π سم^٣. أوجد طول نصف قطر قاعدته إذا كان ارتفاعه ٨ سم.
- ١٨) أوجد لأقرب رقم عشري واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم.
- ١٩) هرم رباعي قائم قاعدته معين طولاً قطريه ١٢ سم، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم. أوجد حجمه.
- ٢٠) اكتب معادلة الدائرة إذا كان:
 أ) مركزها م(٣، ٥) وطول نصف قطرها ٤ وحدات.
 ب) مركزها م(٢، ٠) وطول قطرها ٩ وحدات.
 ج) مركزها م(٠، ٩) وتمر بالنقطة (٤، ٦)
 د) $\overline{AB}$ قطر في الدائرة حيث أ(٥، ٢)، ب(١، ١٠)
- ٢١) اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٥، ١٢) وتمر بنقطة الأصل.

٢٢) أوجد مركز وطول نصف قطر كل دائرة ممالي:

- أ) $(س - ٣) + (ص + ٥) = ٢٧$ ب) $(س + ٤) + (ص + ٩) = ٩$
 ج) $٠ = ٦ - ص + ٢س$ د) $٠ = ٧ - ص + ٢س$

٢٣) **تخطيط المدن:** في رسم لإحدى المدن على مستوى إحداثي متعامد كل وحدة فيه تمثل ٥ أمتار، وجد أن الدائرة: $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان.



٢٤ **الصناعة:** تقوم خطوط إنتاج مصنع آيس كريم بإنتاج نوعين أ، ب الموضحين بالشكل المقابل، أى النوعين أكبر حجمًا. هل يتغير حجم النموذج أ بتغير ارتفاع المخروطين المتلاصقين على أن يظل مجموع الارتفاعين ثابتًا؟ فسر إجابتك.

٢٥ **السياحة:** اهتمت فرنسا بالآثار المصرية القديمة فنقلت بعضها إلى باريس؛ لتعرض في متاحفها. كما أنشأت هرمًا من الزجاج الشفاف مشابهًا للهرم الأكبر؛ ليكون مدخلًا رئيسيًا لمتحف اللوفر بباريس. إذا علمت أن ارتفاعه ٢١,٦ متر وطول ضلع قاعدته ٣٥ مترًا، فأوجد مساحة الزجاج المستخدم في بنائه لأقرب متر مربع.

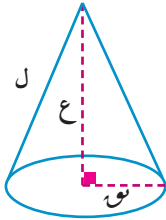


اختبار تراكمي



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا:
 أ مستقيم ونقطة لاتنتمى إليه.
 ب مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.
 ج مستقيمين متقاطعين.
 د مستقيمين متخالفين.



٢ المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوي:

- أ $\pi r l$
 ب $\frac{\pi}{3} r l$
 ج $\pi r (r + l)$
 د $\frac{\pi}{3} r (r + l)$

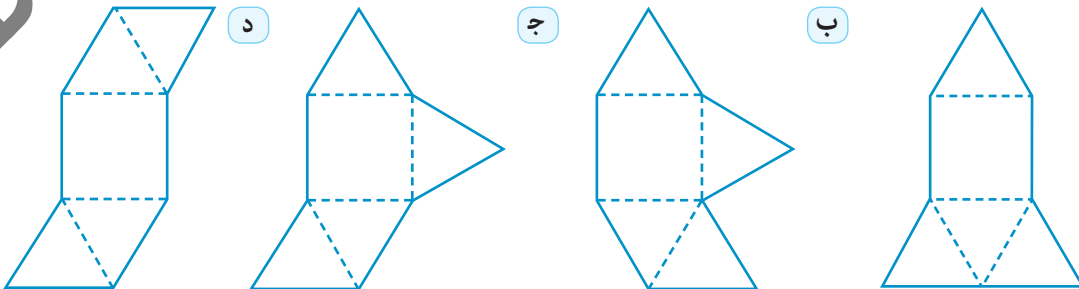
٣ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم، وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوي.....سم^٣

- أ ٨١٠ ب ١٨٠ ج ٣٦٠ د ٢٧٠

٤ الدائرة (س + ٢) + ص^٢ + ٢ = ٠ مركزها النقطة:

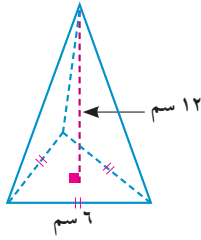
- أ (٢، ٢) ب (٢-، ١-) ج (٢، ١-) د (٢، -٤)

٥ أى الشبكات التالية لاتصنع هرمًا رباعيًّا منتظمًا عند طيها.

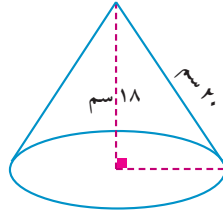


أسئلة ذات إجابات قصيرة

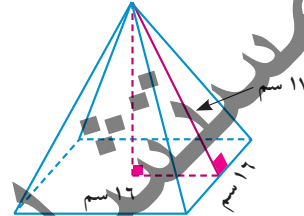
- ٦ كم مستقيماً يمكن رسمه في كل حالة من الحالات الآتية:
 أ نقطتان مختلفتان. ب ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.
 ج مستويان متقاطعان. د أربع نقاط في الفراغ، لاتقع أى ثلاث منها على استقامة واحدة.
- ٧ اذكر عدد المستويات التي يمكن أن تمر بكل مما يأتي:
 أ نقطة معلومة. ب نقطتين معلومتين. ج ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.
- ٨ أوجد حجم كل مجسم مما يأتي لأقرب سنتيمتر مكعب.



ج



ب



أ

٩ أوجد معادلة دائرة مركزها النقطة (٢، -٧) وتمر بالنقطة (١، ٣).

١٠ أى الدائرتين الآتيتين متطابقتان؟ فسر إجابتك.

أ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ ، $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

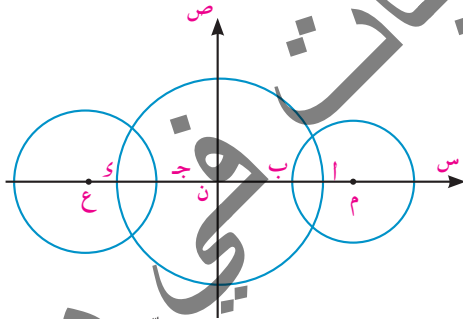
ب $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ ، $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

أسئلة ذات إجابات طويلة:

١١ احسب لأقرب رقم عشري واحد حجم هرم خماسي منتظم، طول ضلع مضلع قاعدته ١٦ سم، وارتفاعه ١٢ سم.

١٢ قطاع دائري م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفاً قطره؛

ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.



١٣ فى الشكل المقابل: النقط م، ن، ع تقع على محور السينات

لمستوى إحداثى متعامد، ن نقطة الأصل. إذا كان م، ن، ع

مراكز ثلاث دوائر أطوال أنصاف أقطارها هي ٥، ٩، ٦ من

الوحدات على الترتيب، جـ ٥ = ٢ م ١ = ٤ وحدات. أوجد

الصورة العامة لمعادلة كل من الدوائر الثلاث.

١٤ رصد طيار فى لحظة ما واديين يلتقيان فى نقطة، ويمر فوقهما شارع لا يمر بنقطة تلاقيها. مثل هذا المشهد

بالرسم، ثم حدد عدد المستويات المتكونة.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تستطع حل السؤال رقم
٤-٣	مهارات عامة	٣-٣	٤-٣	٤-٣	٣-٣	١-٣	٤-٣	٣-٣	٢-٣	ارجع إلى

الاحتمال Probability

الوحدة
الرابعة

مقدمة الوحدة

تمتد جذور علم الاحتمال إلى عصر النهضة من خلال دراسة العلماء لعلم الفلك وألعاب الحظ ومحاولات فهم وتحليل ظواهر عناصر من بين مجموعة كبيرة من العناصر الأخرى والتي قام بها جيرولامو كاردانو (Gerolamo Cardano) في القرن السادس عشر، وبيير دي فيرما، (Pierre de Fermat)، وبليز باسكال (Blaise Pascal) والذان عاشا خلال القرن السابع عشر.

وفى سياق تطور علم الاحتمال وتقدمه، وإنطلاقاً من القرن التاسع عشر ظهرت تعاريف عدة للاحتمال، منها ما هو بسيط، ويعتمد على الإدراك الحسى، ومنها ما يعتمد على التجربة وفكرة التكرار النسبى للحدث المراد اختياره من خلال تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات تحت شروط ثابتة. فالاحتمال مقياس لإمكانية وقوع حادث (Event) معين

و انطلاقاً من القرن التاسع عشر اكتشفت نظرية الاحتمالات التى تعتبر المساعد الأكبر للعمل الإحصائى، ويعتبر العالم لبلاس (Laplace) أحد مؤسسيها، كذلك العالم أدولف كوتيليت (Adolph Quteelet) الذى قدم أول عمل إحصائى بطريقة علمية سنة ١٨٥٣ وابتداءً من ذلك الوقت بدأ الإحصاء والاحتمال يبرز كعلم له فائدته، وقيمتها الكبيرة فى مختلف المجالات، كذلك فى البحوث العلمية فى كافة المجالات ، بل تعدى ذلك إلى إعطاء حسابات صحيحة يعتمد عليها فى التنبؤ فى قضايا مستقبلية . وفى هذه الوحدة نتناول بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية فى الاحتمال وكيفية حسابه.

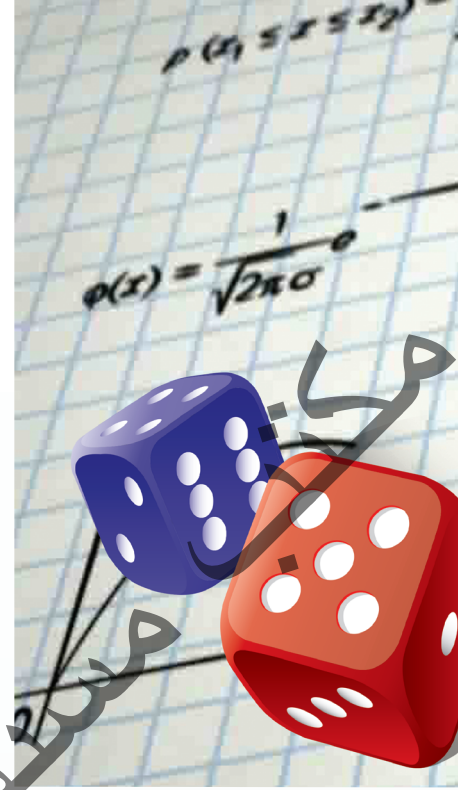
مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم التجربة العشوائية.
- يتعرف مفهوم فضاء العينة.
- يكتب فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية.
- يتعرف مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل.
- يتعرف مفهوم الأحداث المتنافية.
- يتعرف العمليات على الأحداث مثل (الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال).
- يتعرف مفهوم الاحتمال.
- يستخدم مسلمات الاحتمال فى حساب احتمال وقوع حد.
- يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال.
- يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال.

المصطلحات الأساسية

Simple Event	حدث بسيط (أولي)	Statistics	إحصاء
Compound Event	حدث مركب	Probability	احتمال
Certain Event	حدث مؤكد	Random Experiment	تجربة عشوائية
Impossible Event	حدث مستحيل	Sample space	فضاء العينة - فضاء النواتج
Operation on the Events	العمليات على الأحداث	Coin	قطعة نقود
Mutually Exclusive Events	أحداث متنافية	Die	حجر نرد
		Event	حدث



الأدوات والوسائل

Scientific calculator
Graphical calculator
Graphical programs

آلة حاسبة علمية
آلة حاسبة رسومية
برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): حساب الاحتمال.

مخطط تنظيمي للوحدة

الاحتمال

مسلّمات الاحتمال

قوانين الاحتمال

تجارب عشوائية

فضاء العينة

العمليات على الأحداث

الحدث

قانونا ري مورجان

فرق

اكمال

اتحاد

تقاطع

أحداث متنافية

محتمل

مستحيل

مؤكد

تطبيقات حياتية وحل مشكلات

حساب الاحتمال

Calculating Probability

مقدمة :

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفي هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث في حساب احتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

Basic terms and concepts

مصطلحات ومفاهيم أساسية

تعلم

التجربة العشوائية : Random Experiment

هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

مثال

١) بين أيًا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟

- إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.
- سحب كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة (دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.
- إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوي.
- سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة في الحجم والوزن، الأولى بيضاء، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الحل

التجارب (أ)، (جـ)، (د) هي تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.

بينما تجربة (ب) هي تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

٢) حاول أن تحل

١) بين أيًا من التجارب الآتية هي تجربة عشوائية :

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث - الحدث البسيط
- الحدث المؤكد - الحدث المستحيل .
- العمليات على الأحداث:
- الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال.
- الأحداث المتنافية .
- قانون دي مورجان.
- مفهوم الاحتمال
- حساب الاحتمال
- مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

المصطلحات الأساسية

- تجربة عشوائية
- random experiment
- فضاء العينة
- sample space
- حدث
- event
- حدث بسيط
- simple event
- حدث مؤكد
- certain event
- حدث مستحيل
- impossible event
- أحداث متنافية
- mutually exclusive events
- الاحتمال
- probability
- مسلمات الاحتمال
- probability axioms

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة.

- أ إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.
 ب سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.
 ج سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.

تعلم



Sample space (outcomes space)

فضاء العينة (فضاء النواتج) :

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)

ملاحظة:

يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف).
 يكون فضاء العينة منتهياً إذا كان عدد عناصره محدوداً، أو غير منتهٍ إذا كان عدد عناصره غير محدود، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهي.

فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة :

أولاً: إلقاء قطعة نقود : Tossing a coin

١- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة

وملاحظة الوجه الظاهر هو: $F = \{ص, ك\}$

حيث ص ترمز للصورة، ك ترمز للكتابة

ويكون: $n(F) = 2$

٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو:

$F = \{(ص, ص), (ص, ك), (ك, ك), (ك, ص)\}$

ويكون: $n(F) = 2 \times 2 = 4$

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات

متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن

الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو:

$F = \{(ص, ص, ص), (ص, ص, ك), (ص, ك, ك), (ص, ك, ص),$

$(ك, ك, ك), (ك, ك, ص), (ك, ص, ص), (ك, ص, ك),$

$(ص, ك, ك), (ص, ك, ص), (ص, ص, ك), (ص, ص, ص)\}$

ويكون: $n(F) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

لاحظ من الأمثلة السابقة

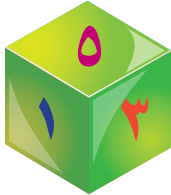
١- عند رمي قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون $n(F) = 2^m$

٢- $(ص, ك) \neq (ك, ص)$ لماذا؟



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتي نقود متمايزتين (مختلفتين في الشكل أو الحجم) معًا هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، ويكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب: (وجه القطعة الأولى، وجه القطعة الثانية).

Tossing a die



ثانيًا: إلقاء حجر نرد:

١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذي يظهر على

الوجه العلوي هو:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ويكون: ن (ف) = ٦

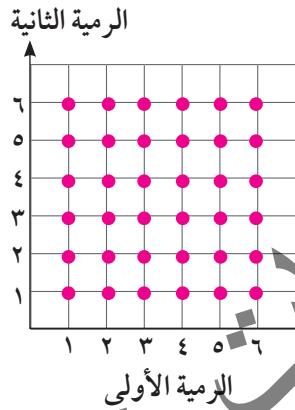
٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر

في كل مرة على الوجه العلوي هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول

هو ناتج الرمية الأولى، ومسقطها الثاني هو ناتج الرمية الثانية أي أن:

ف = {(س، ص): س ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، ص ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}} والأشكال التالية توضح ذلك.

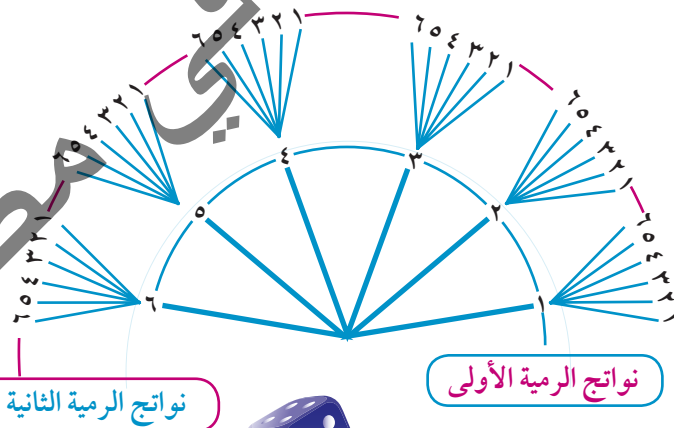
ب صورة هندسية:



أ صورة جدولية:

الرمية الأولى \ الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١، ١)	(٢، ١)	(٣، ١)	(٤، ١)	(٥، ١)	(٦، ١)
٢	(١، ٢)	(٢، ٢)	(٣، ٢)	(٤، ٢)	(٥، ٢)	(٦، ٢)
٣	(١، ٣)	(٢، ٣)	(٣، ٣)	(٤، ٣)	(٥، ٣)	(٦، ٣)
٤	(١، ٤)	(٢، ٤)	(٣، ٤)	(٤، ٤)	(٥، ٤)	(٦، ٤)
٥	(١، ٥)	(٢، ٥)	(٣، ٥)	(٤، ٥)	(٥، ٥)	(٦، ٥)
٦	(١، ٦)	(٢، ٦)	(٣، ٦)	(٤، ٦)	(٥، ٦)	(٦، ٦)

ج الشجرة البيانية



لاحظ أن:

١- ن (ف) = ٦ × ٦ = ٣٦

٢- ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} × {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد

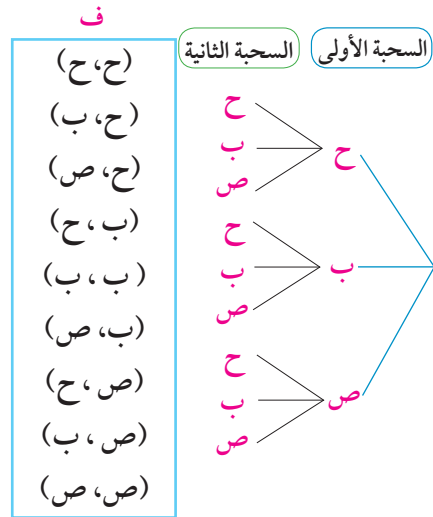
متمايزين في آن واحد (معًا)، هو نفس

فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد

مرتين متتاليتين.

مثال

٢ كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء. اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.



نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور في السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث $n = 3^2 = 9$

ف = { (ح، ح)، (ح، ب)، (ح، ص)، (ب، ح)، (ب، ب)، (ب، ص)، (ص، ح)، (ص، ب)، (ص، ص) }

أضف إلى معلوماتك

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهذا يعني عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها في السحبة الثانية.

٤ حاول أن تحل

٢ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة. اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.

تعلم

The event

الحدث

الحدث هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

The simple event

الحدث البسيط (الحدث الأولي)

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوي عنصراً واحداً فقط.

The certain event

الحدث المؤكد :

هو الحدث الذي عناصره هي عناصر فضاء العينة ف وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

The impossible event

الحدث المستحيل

هو الحدث الخالي من أي عنصر ويرمز له بالرمز ϕ وهو حدث مستحيل أي يقع في أي مرة تجرى فيها التجربة

مثال

٣ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .

اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:

- أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"
 ب "حدث ظهور صورة على الأقل"
 ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"
 د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل

من الرسم نجد أن

$$ف = \{ص، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ك)\}$$

$$أ = \{ص، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ك)\} = ف$$

$$ب = \{ص، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$$

$$ج = \{(ك، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)، (ك، ك)\}$$

$$د = \{\phi\} = \text{الحدث المستحيل}$$

٤ حاول أن تحل

٢ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.

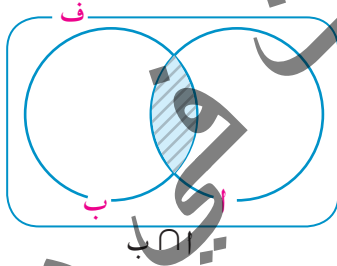
اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:

- أ "حدث ظهور صورة على الأقل"
 ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"
 ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"

Operation of the events

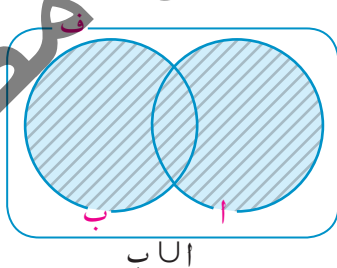
العمليات على الأحداث

تعلم



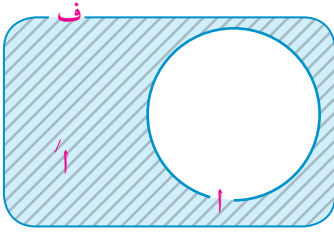
أولاً: التقاطع Intersection

تقاطع الحدثين أ، ب هو الحدث $A \cap B$ الذي يحوى كل عناصر فضاء العينة التي تنتمى إلى أ، ب معاً ويعنى وقوع أ و ب (وقوع الحدثين معاً)

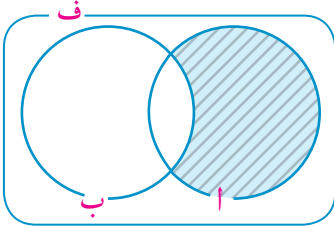


ثانياً: الاتحاد Union

اتحاد الحدثين أ، ب هو الحدث $A \cup B$ الذي يحوى كل عناصر فضاء العينة التي تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما معاً ويعنى وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)

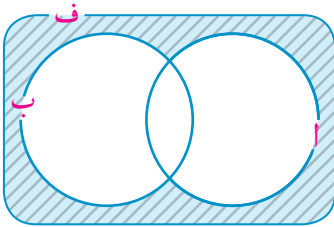


ثالثًا : الإكمال Completion
الحدث A يسمى الحدث المكمل للحدث A ، لذلك A' يحوى كل عناصر فضاء العينة التى لا تنتمى إلى الحدث A ، ويعنى **عدم وقوع الحدث A** .
لاحظ : $A \cup A' = F$ ، $A \cap A' = \emptyset$



رابعًا : الفرق Difference
الحدث $A - B$ يحوى كل عناصر الفضاء التى تنتمى إلى A ، ولا تنتمى إلى B وهى أيضًا نفس عناصر $A \cap B'$

ويعنى **وقوع A وعدم وقوع B (وقوع A فقط)**
 $A - B = A \cap B' = (A \cap B) - B$



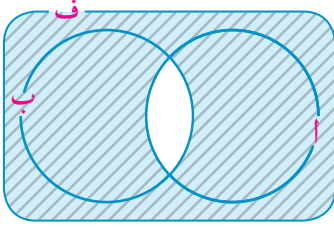
خامسًا : قانونا دى مورجان
إذا كان A ، B حدثين من F فإن :

(أولًا) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

وتعنى حدث (عدم وقوع أى من الحدثين) أو (عدم وقوع A وعدم وقوع B)

(ثانيًا) $A \cup B' = (A \cap B) \cup A'$

و تعني حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر".



تعلم

Mutually exclusive events

الأحداث المتنافية

يقال لحدثين A ، B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.
فمثلاً: **١-** إذا كان A "حدث النجاح فى امتحان ما" ، B "حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كان A حدث ظهور عدد فردى $A = \{1, 3, 5\}$

B حدث ظهور عدد زوجى $B = \{2, 4, 6\}$

فإن $A \cap B = \emptyset$ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

◀ يقال: إن الحدثين A ، B متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

◀ يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذاً فقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

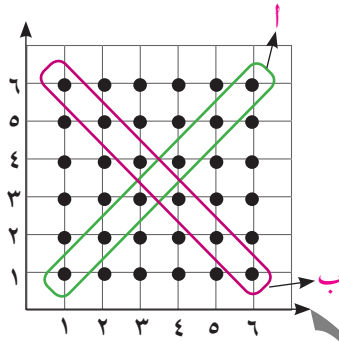
لاحظ :

- ١- إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن A ، B حدثان متنافيان.
- وإذا كانت A ، B ، C ثلاثة أحداث من F وكان: $A \cap B = \phi$ ، $B \cap C = \phi$ ، $A \cap C = \phi$ ، فإن A ، B ، C أحداث متنافية والعكس صحيح.
- ٢- الأحداث البسيطة (الأولية) في أى تجربة عشوائية تكون متنافية.
- ٣- أى حدث A ومكمله A^c هما حدثان متنافيان.

مثال

- ٤) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها.
- أولاً: مثل فضاء العينة هندسياً واكتب كلاً من الحدثين الآتيين.
- الحدث A " ظهور نفس العدد على الوجهين "
- الحدث B " ظهور عددين مجموعهما ٧ ".
- ثانياً: هل الحدثان A ، B متنافيان؟ فسر إجابتك.

الحل



أولاً: عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هي أزواج مرتبة عددها $36 = 6^2$

الشكل المقابل هو التمثيل الهندسى لفضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما فى الشكل .

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$B = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$

ثانياً: $A \cap B = \{(3,3)\}$ ، A ، B حدثان متنافيان

حاول أن تحل

- ٤) فى المثال السابق اكتب كلاً من الحدثين الآتيين :
- ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥ "
- هل الحدثان ج، د متنافيان؟ فسر إجابتك.

Propability

الاحتمال

تعلم



حساب الاحتمال :

إذا كان F فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانيات، فإن احتمال وقوع أى حدث $A \subset F$ يرمز له بالرمز $L(A)$ حيث :

$$L(A) = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدي إلى وقوع الحدث } A}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} = \frac{n(A)}{n(F)}$$

مثال

- ٥) سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر، الباقي باللون الأخضر، احسب احتمال الأحداث الآتية:
- أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.
- ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

الحل

$$\text{احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد جميع الكرات}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\text{احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء} + \text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} = \frac{2+3}{10} = 0,5$$

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{3+2}{10} =$$

$$\text{احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء} = \frac{5+2}{10} = 0,7$$

فكر: هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

٥) في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية:

د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.

هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء.

تعلم

Axioms of probability

مسلمات الاحتمال

١- لكل حدث A ف يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال الحدث A ويرمز له بالرمز $P(A)$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

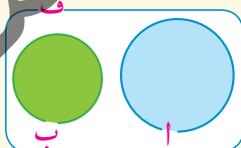
حيث:

$$P(\text{ف}) = 1$$

٣- إذا كان $A \subset B$ ، $P(A) \leq P(B)$

وكان A, B حدثين متنافيين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



من المسلمات السابقة نلاحظ:

المسلمة الأولى تعني احتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي ينتمي للفترة $[0, 1]$

المسلمة الثانية تعنى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١
يمكن تعميم **المسلمة الثالثة** إلى أى عدد محدود من الأحداث المتنافية

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots$ ، أن أحداث متنافية

نتائج هامة

$$(1) P(\emptyset) = 0$$

$$(2) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$(3) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$(4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال

٦ إذا كان A, B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :

$$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

أ $P(A \cup B)$ ب $P(\bar{A})$ ج $P(A - B)$ د $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

الحل

$$أ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$ب P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$ج P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$د P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

٩ حاول أن تحل

٦ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أ $P(\bar{B})$ ب $P(A - B)$ ج $P(A \cup B)$

مثال

٧ إذا كان A, B حدثين من فضاء تجربة عشوائية ف وكان $P(A) = \frac{5}{8}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A - B) = \frac{3}{8}$ فأوجد :

أ $P(A \cap B)$ ب $P(A \cup B)$ ج $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ د $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

الحل

$$أ P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$ب P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$ج P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$د P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

فكر: هل يمكنك إيجاد $P(A \cup B)$ بطريقة أخرى؟ وضح ذلك

٤ حاول أن تحل

٧ في المثال السابق أوجد:

ج $P(A \cap B)$

ب $P(A \cup B)$

أ $P(A)$

مثال

٨ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ فأوجد:

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

ج احتمال وقوع الحدث B فقط.

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

الحل

$\therefore P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$\therefore P(A) = \frac{1}{4}$ $\therefore P(B) = \frac{1}{4}$ $\therefore P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل $= P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر $= P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

ج احتمال وقوع الحدث B فقط $= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط $= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

فكر: هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك

٤ حاول أن تحل

٨ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

فاحسب احتمال الأحداث الآتية:

أ حدث "وقوع أحد الحدثين على الأقل"

ب حدث "وقوع أحدهما فقط"

ج حدث "وقوع أحد الحدثين فقط"

د حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر"

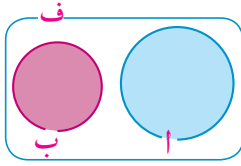
مثال

٩ A ، B حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:

$P(A) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ أوجد $P(A)$ ، $P(B)$

أولاً: إذا كان A ، B حدثين متنافيين.

ثانياً: إذا كان $A \supset B$



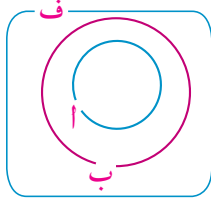
الحل

بفرض أن $L(A) = S$

أولاً: $L(A \cup B) = L(A) + L(B)$ ، ب حدثان متنافيان.

$L(A \cup B) = L(A) + L(B)$ فيكون: $0.72 = S + S$

$S = 0.18$ ، $L(A) = 0.18$ ، $L(B) = 0.54$



ثانياً: $L(A \cup B) = L(A) + L(B)$

$L(A \cup B) = L(A) + L(B)$ ، $S = 0.72$

$L(A) = 0.24$ ، $L(B) = 0.72$

٩ حاول أن تحل

٩، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

$L(B) = \frac{1}{5}$ ، $L(A \cup B) = \frac{1}{3}$ أوجد $L(A)$

أ إذا كان A ، ب حدثين متنافيين. ب إذا كان $B \supset A$

تفكير ناقذ:

بين كيف يمكن حساب $L(A)$ إذا كان $A \supset B$ ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان: $L(A) = \frac{3}{5}$ ، $L(B) = \frac{1}{5}$

٩ حاول أن تحل

١٠ إذا كان F فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث $F = \{A, B, C\}$ ، وكان $L(A) = \frac{1}{3}$ ، $L(B) = \frac{2}{3}$ ، $L(C) = \frac{5}{6}$ ، أوجد $L(C)$

أوجد $L(C)$

مثال

١٠ الربط بالبيئة المدرسية: إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان الفيزياء يساوي 0.85 ، واحتمال نجاحه في

امتحان الرياضيات 0.9 واحتمال نجاحه في الامتحانين معاً 0.8 أوجد احتمال :

أ نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل. ب نجاح الطالب في امتحان الرياضيات فقط.

ج عدم نجاح الطالب في الامتحانين معاً.

الحل

ليكن A حدث نجاح الطالب في امتحان الفيزياء ، B حدث نجاح الطالب في الرياضيات

فيكون: $L(A) = 0.85$ ، $L(B) = 0.9$ ، $L(A \cap B) = 0.8$

أ احتمال نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل $L(A \cup B)$

$L(A \cup B) = L(A) + L(B) - L(A \cap B) = 0.85 + 0.9 - 0.8 = 0.95$

ب احتمال نجاح الطالب في امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه في امتحان الرياضيات وعدم

نجاحه في امتحان الفيزياء أي $L(B - A)$

$$\therefore L - (B - A) = L - (B \cap A) = 0,8 - 0,9 = 0,1$$

ج حدث عدم نجاح الطالب في الامتحانين معاً $(B \cap A)$ وهو حدث مكمل للحدث $(A \cap B)$
 $\therefore L - (B \cap A) = 0,8 - 0,9 = 0,1$

تطبيقات حياتية:

٩ حاول أن تحل

١١ للحصول على وظيفة في إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظري ، والآخر عملي ، إذا كان احتمال النجاح في الاختبار النظري ٠,٧٥ واحتمال نجاحه في الاختبار العملي ٠,٦ واحتمال النجاح في الاختبارين معاً ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :
 أ نجاحه في الاختبار النظري فقط .
 ب نجاحه في أحد الاختبارين على الأقل .

تفكير ناقد:

الربط بالرياضة: صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفي معه بأن احتمال فوز فريقه في مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه في مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه في المبارتين معاً ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

مثال

١١ ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولو حظ العددين الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة ، احسب احتمال:
 أولاً: أ حدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوي ٤"
 ثانياً: ب حدث أن يكون "أحد العددين ضعف الآخر"
 ثالثاً: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوي ٢"
 رابعاً: د حدث أن يكون "مجموع العددين أكبر من ١٢"

الحل

ن(ف) = ٣٦

أولاً: أ $\{ (١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (١, ٣), (٣, ١), (٢, ٤), (٤, ٢), (٣, ٦), (٦, ٣) \}$. ن (أ) = ٦ ، $\therefore \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

ثانياً: ب $\{ (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٤), (٤, ٢), (٣, ٦), (٦, ٣) \}$. ن (ب) = ٦ ، $\therefore \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

ثالثاً: ج $\{ (١, ٣), (٣, ١), (٢, ٤), (٤, ٢), (٣, ٥), (٥, ٣), (٦, ٤), (٤, ٦) \}$. ن (ج) = ٨ ، $\therefore \frac{٨}{٣٦} = \frac{٢}{٩}$

رابعاً: د حيث إنه لا يمكن أن يظهر عدداً مجموعهما أكبر من ١٢ ، $\therefore \phi = \emptyset$ ، ل (د) = صفر

٩ حاول أن تحل

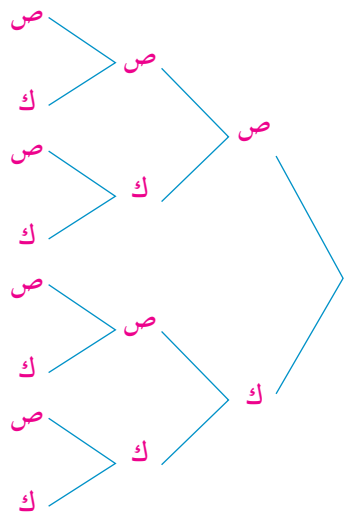
١٢ في المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانياً: ب حدث " العدد في الرمية الأولى فردي وفي الرمية الثانية زوجي "

مثال

١٢ ألقى قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية :



أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانياً: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثاً: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.

الحل

ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

ن (ف) = ٨

أولاً: ٠: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .

٠: ١ = {(ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)}

٠: ن (١) = ٣ ٠: ل (١) = $\frac{3}{8}$

ثانياً: ٠: ب حدث ظهور صورتين على الأقل، أي إما صورتان أو ثلاث صور

٠: ب = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}

٠: ن (ب) = ٤ ٠: ل (ب) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ثالثاً: ٠: ج حدث ظهور صورتين بالضبط

٠: ج = {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)} ٠: ن (ج) = ٣ ٠: ل (ج) = $\frac{3}{8}$

٤ حاول أن تحل

١٣ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أولاً: أ حدث ظهور نفس الوجه في الرميات الثلاث ثانياً: ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثاً: ج حدث ظهور عدد فردي من الصور رابعاً: د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامساً: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوي نفس العدد من الكتابات.

مثال

١٣ الارتباط بالمجتمع: في أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة، وبياناتهم موضحة بالجدول التالي :

المجموع	يتحدث الفرنسية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث العربية	
١٢٠	٢٥	٤٥	٥٠	رجل
٨٠	٥	٣٠	٤٥	امراة
٢٠٠	٣٠	٧٥	٩٥	المجموع

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائياً فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

- أ امرأة تتحدث العربية.
 ب رجل يتحدث الإنجليزية.
 ج يتحدث العربية أو الفرنسية.
 د يتحدث العربية والإنجليزية.
 ه امرأة لا تتحدث الإنجليزية ولا يتحدث العربية.

الحل

- أ احتمال أن يكون المختار "امرأة تتحدث العربية" $= \frac{40}{100} = 0,4$
 ب احتمال أن يكون المختار "رجل يتحدث الإنجليزية" $= \frac{40}{100} = 0,4$
 ج احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية أو الفرنسية" $= \frac{30 + 40}{100} = 0,7$
 د احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية والإنجليزية" $= \phi = 0$
 ه احتمال أن يكون المختار "امرأة لا تتحدث الإنجليزية ولا يتحدث العربية" $= \frac{0}{100} = 0,0$

٤ حاول أن تحل

١٤ في المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- أ لا يتحدث الإنجليزية.
 ب يتحدث الألمانية.
 ج امرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية.
 د رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.

تمارين (٤ - ١)

١ يرغب طالب في شراء حقيبة ويمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًا، مثل فضاء العينة في هذا الموقف بالشجرة البيانية.

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

- أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلاً من الأحداث الآتية.
 الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردى».
 الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجى».
 الحدث ج «ظهور عدد أولى أكبر من ٢».
 الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

٣ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى. عين كلاً من الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور عددين متساويين».
 الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
 الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣».
 الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

٤ من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عدداً من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعين منها الأحداث الآتية:

- أ حدث أن يكون رقم الآحاد فردياً.
 ب حدث أن يكون رقم العشرات فردياً.
 ج حدث أن يكون كلا الرقمين فردياً.
 د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فردياً.

٥ حقية بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :

- أ حدث " العدد المسجل زوجي وأكبر من ١٠ " ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢ "
ج حدث " العدد المسجل فردي ويقبل القسمة على ٣ " د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ "
هـ حدث " العدد المسجل أولى "
و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة $٥ - ٣ \geq ١٧$ "

٦ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ وإذا كان :
أ حدث " العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد في السحبة الأولى "
ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣ "
اكتب كلاً من أ ، ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

٧ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثل فضاء النواتج بشكل شجري، ثم عيّن الأحداث الآتية :

- أ حدث " ظهور كتابتين على الأقل " ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر "
ج حدث " ظهور صورة في الرمية الأولى " د حدث " عدم ظهور صورة في الرميات الثلاث "
٨ ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد، مثل فضاء العينة بشكل شجري ثم أوجد الأحداث الآتية :
أ حدث " ظهور كتابة وعدد زوجي " ب حدث " ظهور صورة وعدد فردي "
ج حدث " عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب " د حدث " وقوع الحدث أ فقط "
هـ حدث " وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب "
اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

٩ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردي أقل من ٥ هو :

أ $\frac{2}{5}$ ب $\frac{1}{6}$ ج $\frac{1}{3}$ د $\frac{1}{6}$

١٠ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، فإن احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الأولى وعدد أولى في الرمية الثانية هو :

- أ $\frac{1}{3}$ ب $\frac{1}{6}$ ج $\frac{1}{9}$ د $\frac{1}{4}$

١١ إذا سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن :
احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :

- أ $\frac{1}{5}$ ب $\frac{2}{3}$ ج $\frac{7}{15}$ د $\frac{1}{2}$

١٢) يحتوي صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائياً، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقماً فردياً هو :

- أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{7}{9}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{5}{9}$

١٣) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان $B \subset A$ ، $L(A) = L(B) = 0.6$ ، فإن $L(A - B)$ يساوي:

- أ) 0.6 ب) 0.3 ج) 0.4 د) 0.2

١٤) ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي: احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ) "حدث ظهور عدد فردى".
 ب) "حدث ظهور عدد أولى".
 ج) "حدث ظهور عدد زوجى".
 د) "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢".
 هـ) "حدث ظهور عدد مكون من رقمين".
 و) "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد".
 ب) احسب: $L(A \cup ج)$ ، $L(هـ \cap و)$ ، $L(ب \cap د)$.

١٥) إذا كان $F = \{A, B, C, D\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد:

$$L(A), L(B), \text{ إذا كان } L(A) = 3, L(B) = 1, L(C) = 1, L(D) = \frac{7}{18}$$

١٦) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:

$$L(A \cup B) = 0.6, L(A - B) = 0.25, \text{ أحسب } L(A), L(B).$$

١٧) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $L(A) = \frac{1}{3}, L(B) = \frac{3}{4}, L(A \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد:

- أ) $L(A)$ ب) $L(A \cup B)$ ج) $L(A - B)$ د) $L(A \cap B)$

١٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:

$$L(A) = 0.4, L(B) = 0.3, L(A \cap B) = 0.2, \text{ احسب احتمال:}$$

- أ) وقوع فقط. ب) وقوع أ أو ب. ج) وقوع أو عدم وقوع ب.

١٩) صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائياً. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

- أ) حمراء. ب) زرقاء أو صفراء. ج) ليست زرقاء. د) ليست حمراء ولا صفراء.

٢٠) مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ العدد المدون عليها. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

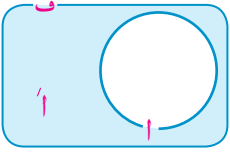
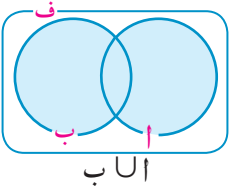
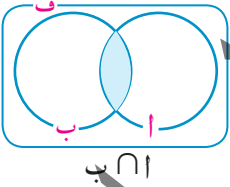
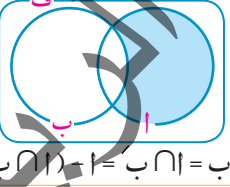
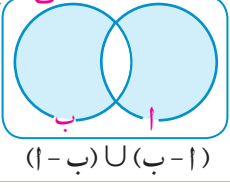
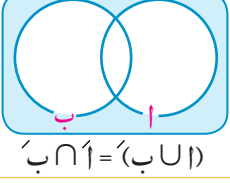
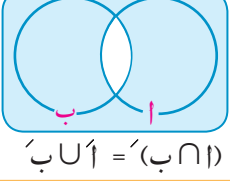
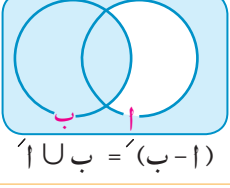
- أ) عدداً يقبل القسمة على ٣ ب) عدداً يقبل القسمة على ٥
 ج) عدداً يقبل القسمة على ٣ و ٥ د) عدداً يقبل القسمة على ٣ أو ٥

- ٢١ ألقى ثلاث قطع نقود متميزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين. ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر. د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.
- ٢٢ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- أ حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى. ب حدث ظهور العدد ٨ فى الرمية الأولى.
- ج حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى. د حدث ظهور العدد ٨ فى الرمية الأولى.
- ٢٣ الربط بالرياضة: عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصاً شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصاً، منهم يشجع نادى الهلال، و ٢٨ شخصاً يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لا يشجعون أيّاً من الناديين.
- إذا اختير شخص عشوائياً من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعي:
- أ أحد الناديين على الأقل. ب الناديين معاً.
- ج نادى الهلال فقط. د أحد الناديين فقط.
- ٢٤ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى، ب حدث ظهور عدد زوجي. احسب احتمال وقوع كل من الحدثين أ، ب ثم احسب احتمال كلا من الأحداث الآتية:
- أ وقوع أحد الحدثين على الأقل. ب وقوع الحدثين معاً.
- ج وقوع ب فقط. د وقوع أحد من الحدثين فقط.
- ٢٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:
- أ مضاعفاً للعدد ٧. ب مربعاً كاملاً.
- ج مضاعف للعدد ٧ ومربعاً كاملاً. د ليس مربعاً كاملاً، وليس مضاعفاً للعدد ٧.
- ٢٦ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل $\frac{2}{3}$ ل (أ)، ل (أ-ب) = $\frac{1}{3}$.
- ل (ب ∩ أ) = $\frac{1}{3}$ ، أوجد: ل (أ)، ل (ب)، ل (أ ∪ ب)، ل (أ ∪ ب).
- ٢٧ كتب طارق ٧٥ خطاباً على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء، وكتب زياد ٢٥ خطاباً أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائياً مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب:
- أ بلا أخطاء. ب زياد هو الذى كتب الخطاب.
- ج زياد لم يخطئ فى كتابته. د طارق قد أخطأ فى كتابته.
- ٢٨ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف، ل (أ) = $\frac{1}{3}$ ، ل (ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{2}{3}$ ، فاحسب ل (أ ∩ ب)

ملخص الوحدة

- ١ التجربة العشوائية: هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.
- ٢ فضاء العينة (فضاء النواتج): فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له بالرمز Ω .
- ٣ الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.
- ٤ الحدث بسيط (أولي): هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوى عنصرًا واحدًا فقط.
- ٥ الحدث المؤكّد: هو الحدث الذي عناصره هي عناصر فضاء العينة Ω .
- ٦ الحدث المستحيل: هو الحدث الخالي من أي عنصر ويرمز له بالرمز $\emptyset$.
- ٧ العمليات على الأحداث: التقاطع - الاتحاد - الإكمال - الفرق.
- ٨ الأحداث المتنافية
يقال إن الحدثين A ، B متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$.
يُقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت فقط إذا كانت متنافية متنى متنى.
- ٩ حساب الاحتمال
إذا كان Ω فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، والأحداث الأولية التي تحويها متساوية الإمكانيات.
فإن احتمال وقوع أي حدث $A \subset \Omega$ يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- ١٠ مسلمات الاحتمال
لكل حدث $A \subset \Omega$ يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث A يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث: $0 \leq P(A) \leq 1$
 $P(\Omega) = 1$
إذا كان $A \subset \Omega$ ، $B \subset \Omega$ وكان A ، B حدثين متنافيين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ١١ إذا كان $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ هي أحداث متنافية فإن $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) + \dots$
- ١٢ $P(\emptyset) = 0$
- ١٢ إذا كان $A \subset \Omega$ فإن $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- ١٣ لأي حدثين A ، B من Ω فضاء نواتج لتجربة عشوائية فإن
أ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ب $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

١٤ الأحداث بالصورة اللفظية وتمثيلها بشكل فن، واحتمالاتها:

الحدث في صورة لفظية	تمثيل الحدث بشكل فن	احتمال وقوع الحدث
عدم وقوع الحدث أ		$P(A') = 1 - P(A)$
وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
وقوع أ و ب (وقوعهما معًا)		$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
وقوع الحدث فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)		$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
وقوع أحدهما فقط (وقوع فقط أ أو وقوع فقط ب فقط)		$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$
عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)		$P((A \cup B)') = P(A' \cap B')$
عدم وقوع الحدثين معًا (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب) أو (وقوع أحدهما على الأكثر)		$P((A \cap B)') = P(A' \cup B')$
عدم وقوع فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)		$P((A - B)') = P(B \cup A')$



تمارين عامة (الوحدة الرابعة)



اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن :

١ احتمال الحصول على العدد ٥ في الرمية الأولى والعدد ٦ في الرمية الثانية هو:

- أ $\frac{1}{24}$ ب $\frac{1}{30}$ ج $\frac{1}{36}$ د $\frac{1}{6}$

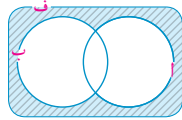
٢ احتمال الحصول على العدد ٥ في إحدى الرمتين والعدد ٦ في الرمية الأخرى هو:

- أ $\frac{1}{12}$ ب $\frac{1}{6}$ ج $\frac{5}{36}$ د $\frac{1}{18}$

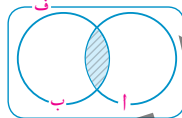
٣ احتمال الحصول على عددين متساويين في الرمتين هو:

- أ $\frac{1}{6}$ ب $\frac{1}{36}$ ج $\frac{1}{6}$ د $\frac{1}{18}$

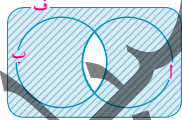
أ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، اختر الحدث الذي يعبر عن الجزء المظلل بشكل فن المقابل:



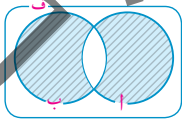
٤ أ ف - (A ∪ B) ب A ∪ B' ج ف - (A ∪ B')



٥ أ A ∩ B ب A ∪ B ج (A ∪ B)' د A ∪ B'



٦ أ (A ∪ B) - (A ∩ B) ب ف - (A ∩ B) ج ف - (A ∪ B) د ف - (A ∩ B)



٧ أ ف - (A ∩ B) ب A ∩ B' ج (A - B) ∪ (B - A) د ف - (A ∪ B)

٨ كون من أرقام العدد ٤٣٢١ أعداد، كل منها يتكون من رقمين مختلفين . مثل فضاء النواتج بشكل شجرة بيانية،

ثم اكتب فضاء النواتج والأحداث الآتية :

أ حدث " مجموعة الأعداد الأولية "

ب حدث " مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ "

ج حدث " مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ و ٥ "

د حدث " مجموعة الأعداد التي بها الأحاد ضعف العشرات "

٩ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى، احسب احتمال أن يكون

العدد الظاهر :

- أ أوليًا ب من عوامل ٦ ج فرديًا يقبل القسمة على ٣

١٠ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية.

أكمل لتكون العبارة صحيحة فيما يأتي:

أ إذا كان A ، B حدثين متنافيين:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A - B} = \overline{A} \cup B \quad \overline{B - A} = A \cup \overline{B}$$

ب إذا كان $A \supset B$ فإن:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A - B} = \overline{A} \cup B \quad \overline{B - A} = A \cup \overline{B}$$

ج إذا كان $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.5$ ، $P(A \cap B) = 0.1$ فإن:

$$\overline{P(A \cup B)} = 0.7 \quad \overline{P(A - B)} = 0.2 \quad \overline{P(B - A)} = 0.4$$

د إذا كان $A \cap B = \emptyset$ ، $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.4$ فإن:

$$\overline{P(A \cup B)} = 0.3 \quad \overline{P(A \cap B)} = 1 \quad \overline{P(A - B)} = 0.3$$

١١ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية، وكان $A \supset B$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ ، احتمال وقوع B فقط يساوي 0.2 . احسب احتمال عدم وقوع B .

١٢ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية، L دالة احتمال معرفة على Ω ، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

أ أوجد قيمة S إذا كان: A ، B حدثان متنافيان. $A \cap B = \emptyset$

ب إذا كانت $S = \frac{1}{4}$ فأوجد $P(A \cap B)$.

١٣ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية، أعط تعبيراً رمزياً لكل من الأحداث الآتية، ومثلها بشكل فن:

أ عدم وقوع الحدث A . $\overline{A}$

ب وقوع أي الحدثين A أو B . $A \cup B$

ج وقوع الحدث B فقط. $B - A$

د وقوع A أو عدم وقوع B . $A \cup \overline{B}$

هـ عدم وقوع الحدثين معاً. $\overline{A \cup B}$

و وقوع أحدهما فقط. $(A - B) \cup (B - A)$

١٤ في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، وملاحظة تتابع الصور والكتابات، مثل فضاء العينة لهذه التجربة بالشجرة البيانية، ثم احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

أ الحدث A «ظهور صورتين فقط». $AA\bar{A}$

ب الحدث B «ظهور صورتين على الأكثر». $AA\bar{A} \cup A\bar{A}A \cup \bar{A}AA$

ج الحدث C «ظهور كتابة واحدة على الأكثر». $AA\bar{A} \cup A\bar{A}A \cup \bar{A}AA \cup \bar{A}\bar{A}A \cup A\bar{A}\bar{A} \cup \bar{A}A\bar{A}$

الثلث.

١٥ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي.

أ ارسـم شكـلاً هندسيـاً يمثـل فضاء العينة ف موضـحاً عليـه كلاً من الأحداث الآتية:

الحدث أ «الحصول على عددین مجموعهم فردی وأکبر من ۶».

◀ الحدث ب «الحصول على عددین أحدهما ۲ ومجموعها ≥ ۵ ».

الحدث ج «الحصول على عددین متساویین».

ب) أى الأحداث أ، ب، ج متنافية متنى متنى؟

ج) حسب كل من: $L(A \cup B)$ ، $L(B \cap C)$ ، $L(A \cup C)$ ، $L(B - C)$.

١٦ خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال، وملاحظة الرقم

المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين. أوجد احتمال:

أ أن يكون رقم الأحاد عددًا أوليًا. ب أن يكون رقم العشرات عددًا فرديًا.

ج) أن يكون رقم الأحاد عدداً أولياً أو رقم العشرات عدداً فردياً.

محرف:

١٧ في عينة من ٥٠ شخصًا، وجد أن ٢٧ شخصًا يقرؤون الصحيفة أ، ٢٤ يقرؤون الصحيفة ب، ٩ أشخاص يقرؤون

الصحيفتين معاً. اختير شخص واحد من هذه العينة عشوائياً. أوجد احتمال أن يقرأ الشخص المختار.

أ الصحيفة أفقط. ب إحدى الصحفين على الأقل.

سياحة:

١٨ في أحد عروض مشروع الصوت والضوء

بالهرم حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة

بيانهم موضح بالجدول الآتي ، فإذا اختير

أحد الحاضرين عشوائيًا عن طريق بطاقات

الدخول الخاصة بهم لمنحه جائزة تذكارية.

أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار

ا رجلاً أوروبياً.

ج. سيدة.

ب) سيدة أمريكية.

٥ ذو جنسية عربية أو أوروبية.

١٩ إذا كان ف = {أ، ب، ج}، فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان:

٢٠ ل (أ) = ١٥ ل (ب) = ١٢ ل (ج) فأوجد: ل (أ) ، ل (ب) ، ل (ج)

عربي	أوروبي	أمريكي	المجموع
٣٢	٤٧	١٥	رجل
٢٣	٦٣	٢٠	سيدة
٥٥	١١٠	٣٥	المجموع



اختبار تراكمي



أكمل ما يأتي:

- ١ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن فضاء النواتج = ...
- ٢ عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين، وملاحظة الوجه العلوي، فإن حدث ظهور صورة على الأكثر = ...
- ٣ عند إلقاء حجر نرد منتظم ثم قطعة نقود وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما فإن حدث ظهور عدد أولي = ...
- ٤ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوي في كل مرة، فإن حدث "مجموع العددين الظاهرين يساوي ٥" = ...
- ٥ عند سحب بطاقة من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الظاهر على البطاقة فإن حدث « العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣ » = ...
- ٦ عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتاليات وملاحظة تتابع الصور والكتابات، فإن حدث "ظهور صورتين بالضبط" = ...
- ٧ إذا كان $A \cap B$ ف حيث ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{3}{4}$ فأوجد $P(A)$.
- ٨ صندوق به ٢٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحب منه بطاقة واحدة عشوائياً، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :
- ٩ إذا كان A ، B حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، $P(A \cup B) = 0.85$ ، $P(A) = 0.75$ ، $P(B) = 0.6$ ، أوجد:
- ١٠ إذا كان A ، B حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان $P(A) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوي ٠,٧٥، احتمال حدث "وقوع أحدهما على الأقل" يساوي ٠,٦ فأوجد احتمال الأحداث الآتية:
- أ احتمال وقوعهما معاً. ب وقوع أحد الحدثين فقط. ج وقوع B أو عدم وقوع A .
- ١١ إذا كان A ، B حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان $P(A) = \frac{3}{5}$ ، $P(A \cup B) = 0.45$ ، فأوجد $P(B)$ في الحالات الآتية :
- أ A ، B حدثان متنافيان ب $A \supset B$ ج $P(B - A) = 0.2$
- ١٢ **الربط بالسياحة:** فوج سياحي مكون من ١٩ سائحاً من روسيا، ١٧ سائحاً من إيطاليا، ١٤ سائحاً من فرنسا، اختير أحدهم عشوائياً، احسب احتمال أن يكون السائح:

ب) ليس من فرنسا.

د) من هولندا.

أ) من روسيا أو من فرنسا.

ج) من أوروبا.

١٣) **الربط بالبيئة المدرسية:** في احتفال المدرسة بتكريم أوائل طلابها، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨،

وا احتمال حضور مدير عام التعليم ٠,٩ واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٥ أوجد:

أ) احتمال حضور المحافظ فقط. ب) احتمال حضور أحدهما على الأقل.

ج) احتمال عدم حضورهما معًا.

١٤) أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ف.

فإذا كان $P(A) = 0,6$ ، $P(B) = 0,3$ ، $P(A \cup B) = 0,9$ ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

أ) وقوع أ و ب ب) وقوع أ وعدم وقوع ب ج) وقوع أ فقط أو ب فقط

١٥) إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث $F = \{A, B, C\}$

وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ ، $P(C) = \frac{1}{3}$ فأوجد $P(A \cap B)$

١٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:

$P(A) = 0,6$ ، $P(B) = 0,5$ ، $P(A \cup B) = 0,7$ فأوجد احتمال كل مما يأتي:

أولاً: وقوع الحدثين أ، معاً ثانياً: وقوع حدث أ فقط

ثالثاً: وقوع أحد الحدثين على الأقل رابعاً: وقوع أحد الحدثين فقط

١٧) تقدم لوظيفة بأحد البنوك ٥٠ شخصاً موزعين كما هو موضح بالجدول التالي، اختير أحد المتقدمين عشوائياً،

أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار:

أولاً: أنثى.

ثانياً: من ذوى المؤهلات المتوسطة.

ثالثاً: ذكر من المؤهلات العليا.

رابعاً: أنثى أو من ذوى المؤهلات العليا.

الجنس	مؤهلات عليا	مؤهلات متوسطة	المجموع
ذكر	١٦	١٤	٣٠
أنثى	١٢	٨	٢٠
المجموع	٢٨	٢٢	٥٠

اختبارات عامة

أجب عن الأسئلة التالية:

١ قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ٣ ق، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق، فيكون قياس الزاوية بينهما:

١٨٠. ٥ ٢٠. ٦ ٦٠. ٦ ٠. ٦

٢) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٩٠ كم/س لمدة ٣٠ دقيقة، فإن المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة

بوحدة الكيلو متر تساوى:

- ۱۶۲ ۵ ۴۵ ۳ ۲,۷ ۰.۵ ۳ ۱

٣ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا:

- أ مستقيماً ونقطة لا تنتمي إليه
 ب مستقيمين متوازيين مختلفين
 ج مستقيمين متقاطعين
 د مستقيمين متخالفين

٤ إذا أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة على سطح أفقي، ولوحظ الوجه العلوي فإن احتمال عدم ظهور الصورة يساوي:

- ☐ أ صفر
 ☒ ب $\frac{1}{2}$
☐ ج $\frac{1}{3}$
☐ د $\frac{1}{4}$

السؤال الثاني:

١) إذا كان $\overline{و_1} = \overline{س_5} + \overline{ص_3}$ ، $\overline{و_2} = \overline{س_6} + \overline{ص_7}$ ، $\overline{و_3} = -\overline{س_{14}} + \overline{ب_ص}$ ثلاث قوى
مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\frac{\pi}{6}$ ، $(\sqrt{2}, 10)$ فأوجد قيمتي أ، ب.

٢ وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث. جم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{3}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

السؤال الثالث:

١) قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٣٧,٥ كم بسرعة ٢٥ كم /س ثم قطع ١٨ كم بسرعة ١٢ كم/س
أوجد معيار متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

- أ الإزاحتان في اتجاه واحد ب الإزاحتان في اتجاهين متضادين.

٢) بدأ جسم حركته في خط مستقيم بعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ وبسرعة ابتدائية ٢٠ سم/ث في عكس اتجاه العجلة أوجد سرعته وازاحته بعد:

- أ ٣ ثوانٍ ب ٤ ثوانٍ ج ٦ ثوانٍ د ٩ ثوانٍ

السؤال الرابع:

❶ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ فاحسب أولاً: $P(A \cup B)$ ثانياً: $P(A \cup B)$

٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢، -١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

الاختبار الثانى

تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا اختير حرف عشوائي من حروف المجموعة $F = \{أ، ب، ج، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي، ك، م، ع\}$ فإن احتمال أن يكون هذا الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك هو

- أ $\frac{1}{4}$ ب $\frac{1}{3}$ ج $\frac{1}{2}$ د $\frac{2}{3}$

٢ النقطة التي تقع على الدائرة (س-٢) $ص^2 = ١٣$

- أ (٣، ٤) ب (٢، -٣) ج (٥، ٢) د (٣، ٤)

٣ قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ٥، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 60° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى

- أ ٢ ب ٧ ج ٨ د ٥

٤ ١٨٠ مترًا / ساعة / ث = ... سم / ث^٢

- أ $\frac{1}{30}$ ب ٥ ج ٣٠ د ٣٠٠

السؤال الثانى:

١ مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠ سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥ سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل.

٢ أ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث $P(A) = \frac{3}{8}$ ، $P(B) = \frac{3}{4}$ فأوجد $P(A \cup B)$ فى كل من الحالتين

- أ أ، ب حدثان متنافيان ب $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

السؤال الثالث:

١ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث. جم عُلّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين، تُبَت طرفاهما فى نقطة واحدة، فإذا كان طول الخيطين ٨٠ سم، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

٢ أب جد هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨، ٦، ٣، ٥، ٤، ٣ نيوتن فى أب، أج، اء، اهـ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

السؤال الرابع:

١ نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٦٦ م/ث إلى ٧٩، ٢ كم/س خلال قطعها مسافة ٦٦ مترًا، أوجد الزمن الذى قطعت فيه السيارة هذه المسافة، ثم أوجد المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

٢ قُذِفَ جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوانٍ من لحظة القذف أوجد: أ السرعة الابتدائية ب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

تطبيقات الرياضيات

الاختبار الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين:
 أ) ٦٠ ب) ٩٠ ج) ١٢٠ د) ١٥٠
- ٢) ب جسمان يتحركان في اتجاهين متضادين معيار سرعة أضعف معيار سرعة ب فإن ع ا ب
 أ) ١,٥ ع ا ب) ٢ ع ا ج) ٢,٥ ع ا د) ٣ ع ا
- ٣) إذا كان ل ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية أ ب فإن ل (أ ∪ ب) يساوى
 أ) ل (أ) ب) ل (ب) ج) ل (أ) + ل (ب) د) ل (أ ∩ ب)
- ٤) محيط الدائرة التي معادلتها (س - ٣)² + (س + ٢)² = ٢٥ يساوى
 أ) π٢ ب) π٣ ج) π١٠ د) π٢٥ وحدة طولية

السؤال الثانى:

- ١) سقط جسم من ارتفاع ٢٢,٥ مترًا على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٢٥ سم، احسب كلاً من:
 أ) سرعة الجسم عند سطح الأرض. ب) العجلة التى يتحرك بها الجسم داخل الأرض.
- ٢) يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت فإذا قطع مسافة ٢٦ سم خلال الثانية الرابعة من بدء حركته وقطع ٥٦ سم خلال الثانية التاسعة من بدء حركته، احسب كلاً من:
 أ) عجلة الجسم التى يتحرك بها. ب) السرعة الابتدائية.

السؤال الثالث:

- ١) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلاً من:
 الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.
- ٢) إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض ١٦٠٠ كم، ٦٤٠٠ كم على الترتيب، وكانت النسبة بين عجلتى الجاذبية لكل منهما ١ : ٦ فأوجد النسبة بين كتلتيهما على الترتيب.

السؤال الرابع:

- ١) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ ٣ سم. أوجد:
 أ) المساحة الجانبية. ب) حجم الهرم.
- ٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما، ل (أ) = ٣، ل (ب) = ٨، ل (أ ∩ ب) = ٢، احسب كلاً من:
 أ) ل (أ) ب) ل (أ ∪ ب) ج) ل (أ - ب) د) ل (أ ∪ ب) /

تطبيقات الرياضيات

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

ج) لقرب المسافة بينهما .

$$0 \quad \sqrt[3]{13} \quad 0 \quad \sqrt[3]{0}$$

$(3, 4-)$ **د** $(4, 3-)$ **ز** $(3-, 4)$ **ب** $(4-, 3)$ **ا**

هذا العدد عن ٥ ولا يقل عن ٣ هو:

☐ **A**

١ صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣٠، سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من هذا الصندوق احسب

احتمال أن تكون البطاقة :

١ مرقمة بعدد زوجي يقبل القسمة على ٣. ٢ مرقمة بعدد فردي مكعب كامل.

ج مرقمة بعدد أولى أصغر من ١٥. د مرقمة بعدد به رقم ٢ أو رقم ٣.

٢) أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم مساحته الكلية $\pi \times 11$ سم وطول راسمه ٣٠ سم

السؤال الثالث:

١ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨٥، ٧٥، ٥٠ ث كجم تؤثر في نقطة مادية الأولى في اتجاه الشرق وال ثانية في

اتجاه ٣٠° غرب الشمال والثالثة في اتجاه الجنوب الغربي أوجد مقدار واتجاه المحصلة

٢) خيط أملس طوله ٣٠سم، ربط من طرفيه في نقطتين أ، ب بحيث كان $\overline{AB}$ أفقيًا، أ ب = ١٨سم، فإذا انزلت

حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ث جم على الخيط، أثبت أن في وضع الاتزان يكون طولاً فرعى الخيط متساويين ثم

أوجد الشد في كل منها.

السؤال الرابع:

١ جسم يتحرك في مستوى متعامد وكان عند اللحظتين $n = 2$ ث، $n = 5$ ث عند الموضعين أ (٣، ٧)، ب (١٠، ١٢)

على الترتيب أوجد معيار واتجاه السرعة المتوسطة خلال هذه الفترة الزمنية.

٢ سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٥ مترًا عن سطح الأرض، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسياً لأعلى مسافة

٦متر. احسب سرعة الكرة قبل وبعد التصادم بالأرض مباشرة.

تطبيقات الرياضيات

الاختبار الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ قوتان متساويتان في المقدار تؤثران في نقطة وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما بالنيوتن

- أ $\frac{3}{2}$ ب $3\sqrt{3}$ ج ٣ د $3\sqrt{3}$

٢ إذا سقط جسم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض أفقية فإن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض بوحدة م/ث هي:

- أ صفر ب ٢٠ ج ١٤ د ١٩٦

٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن احتمال وقوع أحدهما فقط هو:

- أ $P(A \cup B)$ ب $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ ج $P(A \cap B)$ د $P(A \cap B)$

٤ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطره ٦ سم، وارتفاعه ٨ سم = ... سم^٢

- أ $\pi 60$ ب $\pi 28$ ج $\pi 10$ د $\pi 48$

السؤال الثاني:

١ تتحرك سيارتان على طريق مستقيم الأولى بسرعة ٩٠ كم/س والثانية بسرعة ٦٠ كم/س. احسب سرعة الأولى بالنسبة للثانية إذا كانتا تتحركان في:

- أ اتجاه واحد. ب اتجاهين متضادين.

٢ قطع قطار المسافة بين القاهرة والاسكندرية على مرحلتين: المرحلة الأولى من القاهرة إلى طنطا وقدرها

١٠٠ كم بسرعة ١٠٠ كم/س المرحلة الثانية من طنطا إلى الاسكندرية وقدرها ١١٠ كم بسرعة ٨٠ كم/س

فإذا كان القطار توقف في طنطا لمدة ١٠ دقائق، أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية (اعتبر أن

القطار يتحرك طوال الوقت على خط مستقيم).

السؤال الثالث:

١ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥، ١٠، ٤ $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر في نقطة مادية، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين

الأولى والثانية يساوي ٦٠° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث.

٢ أ ب سلم منتظم وزنه ٨ $\sqrt{3}$ ث كجم يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسي أملس وبطرفه السفلى ب على

أرض أفقية خشنة، بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن سطح الأرض بمقدار ٣ $\sqrt{3}$ متراً والطرف السفلى

يبعد عن الحائط مسافة ٢ متر، أوجد مقدار الضغط على كل من الحائط والأرض.

السؤال الرابع:

١ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان $P(A \cap B) = \frac{1}{13}$ ، $P(A) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$

احسب احتمال وقوع كل من الأحداث الآتية:

- أ أحدهما على الأقل. ب فقط. ج أحدهما على الأكثر.

٢ أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ بالانتقال (س + ٢، ص - ٢).

الاختبار السادس

تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتهما العظمى، فإن قياس الزاوية بينهما تساوى:
- أ ٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٨٠°
- ٢ إذا تناقصت سرعة سيارة من ٩٠ كم/س إلى ٣٦ كم/س في خلال ٤ ثوان، فإن المسافة خلال هذه الفترة تساوى:
- أ ١٠ متر ب ٢٥ متر ج ٧٠ متر د ١٤٠ متر
- ٣ عند سحب بطاقة من ١٠ بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠، فإن احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ على البطاقة هو:
- أ ٠,٢ ب ٠,٣ ج ٠,٤ د ٠,٥
- ٤ حجم المخروط القائم الذى طول نصف قطره قاعدته نق، ارتفاعه ع:
- أ $\frac{4}{3}\pi r^2$ ب $\frac{3}{4}\pi r^2$ ج $\frac{1}{4}\pi r^2$ د $\frac{1}{3}\pi r^2$

السؤال الثانى:

- ١ أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢، -٤) وطول نصف قطرها ٥ سم.
- ٢ أ، ب حدثان من فضاء عينه لتجربة عشوائية حيث:
- ل(ب) = $\frac{3}{8}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{3}{4}$ فأوجد ل(أ) فى كل مما يأتى:
- أ أ، ب حدثان متنافيان ب ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{8}$

السؤال الثالث:

- ١ إذا علمت أن كتلة الأرض ٥,٩٧ × ١٠^{٢٤} كجم وطول نصف قطرها ٦,٣٦ × ١٠^٦ متر، فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠^{-١١} نيوتن م^٢/كجم^٢
- ٢ يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\vec{r}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ بالعلاقة $\vec{r} = (٣ - ٦٠)\vec{e}_1 + (١ + ٨٠)\vec{e}_2$. أوجد المسافة الإزاحة حتى اللحظة ن = ٣

السؤال الرابع:

- ١ قوتان مقدارهما ١ و ٢ نيوتن، تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتها عمودية على القوة الأولى. أوجد الزاوية بين القوتين، وأثبت أن مقدار محصلتهما يساوى ١.
- ٢ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث جم يؤثر فى مركزها موضوعه بين مستويين أملسين أحدهما رأسى، والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°، أوجد رد فعل كل من المستويين .

تطبيقات الرياضيات

الاختبار السابع

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

١) حلت القوة $\vec{C}$ إلى قوتين $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ وتصنعان مع $\vec{C}$ زاويتان قياسيهما 60° ، 30° من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\vec{C}_1$:

- أ) $\frac{C}{2}$ ب) $\frac{C}{\sqrt{3}}$ ج) $\frac{C}{2\sqrt{3}}$ د) $\frac{C}{2}$

٢) إذا كان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ حداث من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ، $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$ ، $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ ، فإن:

أ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ب) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 1$ ج) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 1$ د) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

٣) قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة 9.8 م/ث ، فإن زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع =

- أ) 1.5 ث ب) 1.0 ث ج) 3 ث د) 2.0 ث

٤) مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته 7 سم وطول راسمه 14 سم فإن حجمه سم³

- أ) $\frac{\pi}{3} \sqrt{3} 49$ ب) $\frac{\pi}{3} 49$ ج) $\frac{\pi}{3} 49$ د) $\frac{\pi}{3} 49$

السؤال الثاني:

١) $\vec{a}$ قضيب منتظم طوله 40 سم وزنه 30 نيوتن متصل بمفصل في حائط رأسى عند $\vec{a}$ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف، يتصل بطرف القضيب عند $\vec{b}$ وبنقطة $\vec{c}$ على الحائط تعلو رأسياً بمسافة 40 سم أوجد كلاً من الشد ورد الفعل عند $\vec{a}$.

٢) وضع جسم وزنه 18 نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها (Q) نيوتن، أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

السؤال الثالث:

١) بدأ جسم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة 15 م/ث وبعجلة منتظمة 2.5 م/ث^2 فى اتجاه السرعة الابتدائية، احسب المسافة التى قطعها الجسم خلال الثانية الرابعة.

٢) سقطت كرة من ارتفاع 90 م عن سطح الأرض وعند وصولها للأرض ارتدت ثانية إلى أعلى بسرعة تساوى نصف سرعة وصولها إلى الأرض. أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

السؤال الرابع:

١) ألقى قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات، احسب احتمالات الأحداث الآتية:

أ) حدث ظهور كتابة واحدة فقط. ب) حدث ظهور صورتين على الأكثر.

٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها $(-2, 3)$ وطول قطرها 8 وحدات طولية.

الاختبار الثامن

تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٢ قوتان متساويتان في قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{4}$ ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن ، فإن مقدار كل منهما بوحدة النيوتن .

- أ ٢٦٢ ب ٤ ج ٢٦٤ د ٨

٣ عدد المستويات التي يمكن أن تمر بأربع نقط ليست في مستوي واحد

- أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

٤ قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٤٢ م/ث، فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يساوى .

- أ ٦٥ م ب ٩٨ م ج ٨٤ م د ٩٠ م

٥ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $A \cap B$ فإن:

- أ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ب $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ج $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ د $P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

السؤال الثاني: أكمل ما يأتي:

١ يتحرك جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث أن متجه موضعه $\vec{r}$ يتحدد بالعلاقة $\vec{r} = (2t^3 + 3t^2 + 5t) \hat{i}$ حيث $\hat{i}$ متجه وحده مواز للخط المستقيم. أوجد متجه الإزاحة، كذلك متجه السرعة المتوسطة منذ بدء الحركة حتى $t = 3$ ث.

٢ قذف حجر صغير بسرعة ١٩,٦ م/ث رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٥٦,٨ م عن سطح الأرض. أوجد:

أ الزمن الذي يستغرقه الجسم من لحظة القذف حتى يصل إلى سطح الأرض.

ب سرعة الجسم عند وصوله إلى سطح الأرض

السؤال الثالث:

١ أ ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث كجم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسى أثرت قوة أفقية $\vec{C}$ علىالقضيب عند ب، فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠ أوجد مقدار $\vec{C}$ ، وورد فعل المفصل.

٢ حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن في اتجاهين، أحدهما يميل على القوة بزاوية قياسها ٦٠°، والآخر يميل بزاوية قياسها ٣٠° من الناحية الأخرى.

السؤال الرابع:

١ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم، فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^٣، فأوجد ارتفاعه الجانبي ومساحته الجانبية.

٢ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة وكان احتمال وقوع الحدث أ = ٠,٥ واحتمال وقوع الحدث ب = ٠,٦،

واحتمال عدم وقوع الحدثين معاً = ٠,٨، فأوجد:

أولاً: احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معاً

ثانياً: احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

ثالثاً: احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ.

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ## السؤال الثاني :

- ### السؤال الثالث:

- ١ تتحرك باخرة في مسار مستقيم نحو ميناء ولما صارت على مسافة ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة في الاتجاه المضاد وبسرعة ٢٥٠ كم/س ورصدت حركة الباخرة، فبدت لها متحركة بسرعة ٣٠٠ كم/س. احسب الزمن الذي يمضي من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.
- ٢ قذف جسيم في عكس اتجاه الرياح بسرعة ٤٠ سم/ث، فتحرك في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث^٢ أوجد سرعة الجسيم عندما يكون على بعد :
- أ ٨٤ سم من نقطة القذف في اتجاه القذف.
- ب ٩٦ سم من نقطة القذف وفي الجهة الأخرى بالنسبة لجهة القذف، وفسر معنى الأجوبة التي تحصل عليها.

السؤال الرابع:

١) إذا كان A ، B حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما، $A \cap B$ ، $L(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ، $L(A \cap B) = \frac{1}{8}$ أوجد:

- أ) احتمال عدم وقوع B .
 ب) احتمال وقوع A .
 ج) احتمال وقوع B فقط.
 د) احتمال وقوع إحداهما فقط.

٢) M AB CD هرم رباعي قائم قاعدته AB CD مربع طول ضلعه $2\sqrt{8}$ سم وطول حرفه الجانبي يساوي $2\sqrt{4}$ أوجد:

- أ) المساحة الجانبية للهرم.
 ب) حجم الهرم.

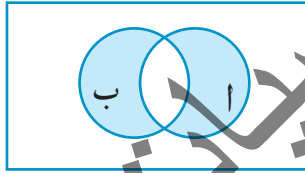
تطبيقات الرياضيات

الاختبار العاشر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

- ١) القيمة العظمى والقيمة الصغرى على الترتيب لمحصلة القوتين ٨، ١٣ نيوتن هما:
 أ) ٨، ١٣ ب) ٥، ١٣ ج) ٨، ٢١ د) ٥، ٢١
- ٢) إذا بدأ جسيم حركته بسرعة ٣٠ سم/ث وبمعدلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ في اتجاه سرعته الابتدائية، فإن المسافة المقطوعة بعد ١٠ ثوانٍ من بدء الحركة = ... سم
 أ) ٥٥٠ ب) ٣٠٠ ج) ٧٥٠ د) ١٥٠٠
- ٣) الحدث الذي يعبر عنه الجزء المظلل بشكل فن المقابل هو =
 أ) $F - (A \cap B)$ ب) $F - (A \cup B)$
 ج) $(A \cup B) - (A \cap B)$ د) $F - (A \cup B)$
- ٤) طول قطر الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٦ص + ١ =$ صفر يساوي:
 أ) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٦



السؤال الثاني:

١) أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(-٢، ٥)$ وتمر بالنقطة $(٣، ٢)$.

٢) إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث $L(A) = ٠,٦$ ، $L(B) = ٠,٢٥$ ، $L(A \cap B) = ٠,٢$ احسب احتمال:

- أ) وقوع A
 ب) وقوع A أو B
 ج) عدم وقوع A وعدم وقوع B

السؤال الثالث:

١) كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان في مستوى أفقي واحد، والبعد بينهما يساوي طول نصف قطر الكرة، أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة ١٠ نيوتن.

٢) قوتان تؤثران في نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث كجم، وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث كجم، أوجد مقدار كل من القوتين، ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°.

السؤال الرابع:

١) إذا علمت أن قوة الجذب المتبادلة بين الشمس والأرض هي $٣٥,٦٧ \times ١٠^{٢١}$ نيوتن وأن كتلة كل من الأرض والشمس هما $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كجم ، ١٩×١٠^{٢٩} كجم . أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا علم أن ثابت الجذب العام يساوي $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢/كجم^٢

٢) أطلقت رصاصة أفقيًا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠ م/ث فغاصت فيها مسافة ٥٠ سم . أوجد العجلة التي تحركت بها الرصاصة داخل الكتلة الخشبية إذا علم أنها عجلة منتظمة وإذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للأولى سمكها ١٨ سم. فما السرعة التي تخرج منها الرصاصة من الكتلة الخشبية؟

الوحدة الأولى: الاستاتيكا

إجابة بعض تمارين (١ - ١)

- ٣) ١٠ نيوتن ٤) ٤ نيوتن ٥) $\sqrt{19}$ نيوتن
٦) ج ٧) د ٨) ج
٩) د ١٠) ب ١١) $\sqrt{5}$ ، 90°
١٢) $3 = \sqrt{5}$ نيوتن و $(\Delta) = 54^\circ 33' 26''$
١٣) 120° ١٤) $9 = 4$ نيوتن ١٥) $\sqrt{2}$ نيوتن
١٦) 90° ١٧) ١٨) ١٥ نيوتن، وعمودية على القوة الأولى
١٩) $1 + \sqrt{2}$ ٢٠) $\sqrt{6}$ ث. كجم
٢١) ٣، ٥ نيوتن ٢٢) ١٥ نيوتن
٢٣) $5 = 3$ ث كجم ٢٤) $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$

إجابة بعض تمارين (١ - ٢)

- ١) صفر ٢) ٤
٣) ٨، ٧٨ نيوتن، ٦، ٢١ نيوتن ٤) $\sqrt{18}$ ، ١٨
٥) ٦ ث كجم ٦) $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{2}$
٧) ٤٣٩، ٢٣١ ث جم، ٥٨٣، ٣١٠ ث جم
٨) $\sqrt{60}$ ، $\sqrt{2}$
٩) ٨٠ ، $\sqrt{80}$
١١) ٢١ نيوتن ١٢) ٣٦٠ ث جم
١٣) ٢٥٨٨ نيوتن، ٣٦٦٠ نيوتن

إجابة بعض تمارين (١ - ٣)

- ١) ٥ ، ظا $\frac{4}{3}$ ٢) ٣ ، $\frac{1}{3}$ ٣) ١- ، ١
٤) شكل ١ ظا $\frac{3}{4}$ شكل ٢ ظا $1^\circ 5'$
شكل ٣ $3 = 1$ وتعمل في اتجاه وس
شكل ٤ $\sqrt{2}$ وتعمل في الاتجاه العمودي على ب ج
شكل ٥ ظا $1^\circ \frac{3}{4}$
شكل ٦ $20 = 3$ ، ظا $1^\circ \frac{3}{4}$

٥) المحصلة تعمل في اتجاه القوة الثانية

- ٦) 210°
٧) $120^\circ = 7$ ٨) $\sqrt{5}$ نيوتن ، 60°
٩) $\sqrt{2}$ نيوتن ، 45° ١١) $1 = 1$ ، ب
١٢) $3 = 3$ نيوتن ، $45^\circ = 4$
١٣) $10 = 4$ ث كجم ، $4 = 4$ ث كجم
١٤) $3 = 3$ نيوتن ، $4 = 14$ نيوتن

إجابة بعض تمارين (١ - ٤)

- ١) مضلع مقفل ٢) س = ٠ ، ص = ٠
٣) ٥ ، ٣ ٤) 120°
٥) ٣ نيوتن ، $\sqrt{3}$ نيوتن
٦) شكل ١ $\sqrt{20}$ ، $\sqrt{40}$
شكل ٢ $\sqrt{6}$ ، ٦
شكل ٣ $50 = 50$ ، ٥
شكل ٤ ١٨ نيوتن ، ٢٤ نيوتن
شكل ٥ $20 = \sqrt{2}$ ث جم
شكل ٦ $60 = 6$ ، و $16 = 16$ وحدة قوة
١١) ح $\approx$ صفر المجموعة متزنة
١٢) و $30 = \sqrt{3}$ ث جم ، س = ٣٠ ث جم
١٣) $1 = 200 \times \frac{4}{5} = 160$ ث جم.
١٤) $2 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$ ث جم.
١٥) $60 = 6$
١٦) و $60 = 6$ ث جم ، س = ١٠٠٠ ث جم
١٧) س = $36 = \sqrt{3}$ نيوتن ، و = ٧٢ نيوتن
١٨) س = $3 = \sqrt{3}$ نيوتن ، س = ٦ نيوتن
١٩) س = $12 = 12$ نيوتن ، س = ١٦ نيوتن
٢٠) ق = ٩ ث كجم ، ك = ٥ ث كجم
٢١) ق = ٩ ث كجم ، ك = ٦ ث كجم
٢٢) $2 = \sqrt{2}$ ث كجم ، ٣٠
إجابة بعض التمارين العامة على الوحدة
١) و $4 = 4$ داين ٢) ٣ ، ١٣ نيوتن
٣) و جا ه ٤) ١٠ ث كجم
٥) أ = ٦ ، ب = ٢
٦) شكل (١): و = ٣ ، ك = $\sqrt{3}$
شكل (٢): و = ك = ٤

إجابة بعض تمارين الاختبار التراكمي

- ١) أ مقدارها فقط ب المقدار ، الاتجاه
٢) أ ج ب ب ب ج ج
٣) أ ١٨ ب ٤٥ ج ٥٠
٤) ع = ٨ نيوتن ، هـ = 30°
٥) ع = ١٢٠

الوحدة الثانية: الديناميكا

إجابة بعض تمارين (٢ - ١)

- ١ ٧٢ كم/س ٢ ٢٥ م/ث ٣ ١٨ كم
٧ ج ٨ ج ٩ ج
١٠ ج ١١ ع = ٢٤، ٩٠ × ١٠ م/ث
١٢ زمن الانتظار = ٧ دقائق ١٣ ف = ٢٥
١٤ ع = ١٠٠ م/ق ١٦ ف للأولى = ٦٦ كم
٢٠ ف = ٢٥ ن

نشاط (٢)

- ف ۴ = ۲۸ ی

إجابة بعض تمارين (٢-٢)

- ٢٤
- ١ ا ب ١٠ هـ ٣ م/ث ٢
- ٢ ٣ ٣٦٣ ٤ ٦، ٢٥ ٧ ٨١، ٨٠، ١٠٨ ٩ ٤٢ م
- ١١ ث ١٣ ٨ ثوان

إجابة بعض تمارين (٢ - ٣)

- ١ ٨،٤ م/ث ٢ ٨،٨ م/ث
٣ ١٠ م/ث ٤ ١٤ م/ث، ٧ م/ث
٥ ١٩، ٦ م/ث ٦ ١٤، ٧ م/ث، ٢ م/ث
٧ ٣، ٦ م/ث ٨ ٢ م/ث
٩ ٣٥ م/ث ١٠ ١٥، ٩ م/ث، ١، ٤٤ م/ث

إجابة بعض تمارين (٢ - ٤)

- | | | | |
|------------------------|----|-----------------------|----|
| $12-10 \times 6, 4898$ | 7 | $12-10 \times 8, 112$ | 6 |
| $10-10 \times 1, 7043$ | 9 | $9-10 \times 2, 0125$ | 8 |
| $22-10 \times 1, 6008$ | 11 | $24-10 \times 6$ | 10 |
| $99 \div 9$ | 13 | $1724 \div 4$ | 12 |
| $10-10 \times 2, 668$ | 15 | $\frac{1}{3}$ | 14 |

إجابة بعض التمارين العامة

- ٤ م/ث، ١٠ م ٥ ١٠ ث
٧ ٤٩ م/ث، ٥ = ١٢٢ مترًا

٩ ع. ٢١ م/ث ، $\frac{20}{v}$ ثانية

- ١٢ ف = ٣٠ كم
 ١٧ ح = ٢٠ ثانية
 ١١ ع = ٦ م / ث
 ١٥ ١١٤ م

إجابة بعض تمارين الأختبار التراكمي

- ١ ب أكبر محصلة = ٢٤ نيوتن
 - ٢ أ أصغر محصلة = ٨ نيوتن
 - ب ج ٣١٨ نيوتن، وتصنع ٣٠° مع القوة ١٦ نيوتن
 - ٣ ٢٧٥ نيوتن، وتعمل مع القوة الأولى زاوية ٣١٥°

الوحدة الثالثة: الهندسة والقياس

إجابة بعض تمارين (٣ - ١)

٦. أ عدد لانهائي ب عدد لانهائي
 ج عدد لانهائي د مستوى واحد فقط
 ه أربع مستويات
 ٧. ا ب ج د
 ٨. ا ب ج د

إجابة بعض تمارين (٣ - ٢)

- ١ أ ٥ ب ٦ ج ٥ د ١٠
- ٢ ارتفاع الهرم، الارتفاع الجانبي، طول الحرف الجانبي
- ٣ ١٢٠ سم، ١٠٩ سم
- ٤ طول لاسم مخروط الخيمة = ٢٠٠ سم
- ٥ ارتفاع الهرم الأكبر يساوي ١٤٥ مترًا تقريبًا.

إجابة بعض تمارين (٣ - ٣)

- ١ أ ج
 ٢ ب ج
 ٣ ج
 ٤ المساحة الجانبية = ٥٧٦ سم^٢
 ٥ تكاليف الورق المقوى = ٥١٠ جنيهاً
 ٦ طول نصف قطر دائرة المخروط = ٧ سم

إجابة بعض تمارين (٣ - ٤)

- ۱ ۴۸۰۰ سم ۲ ۹۱۷۵، ۸ سم ۳ ۱۰۸۲، ۸ سم ۴ ۳۵۰۰ سم ۵ ۹۸۷، ۵ جم ۱۰ ۸ سم ۱۱ ۱۴۰، ۹ م ۱۲ ۳۴۲، ۳ سم ۱۳ ۳ سم

إجابة بعض تمارين (٣ - ٥)

١ أ ٢ ج ٣ ب ٤ ب

٥ د ٦ د

٧ أ (س - ٢) + (ص - ٣) = ٢٥

ب س + ص = ١٦ (س - ٣) + ص = ٣٦

٨ أ (س - ٣) + (ص - ٣) = ٤

ب (س - ٤) + (ص + ٢) = ٩

ج (س - ٤) + (ص - ٣) = ٩

٩ أ (س - ٧) + (ص + ٥) = ٦٥

ب (س - ٣) + (ص + ١) = ١٨

١٢ أ م (٣ - ٢)، م = ٥

ب م (-١، ٠)، م = ٣

إجابة بعض التمارين العامة

٢ نقطتان ٢ مستوى واحد

٣ ثلاث نقاط على الأقل

٥ متساوية في الطول

١١ ٦٠ سم ١٢ ٣٨٤ سم ١٣ ٣٨٤ سم

١٤ ٤ : ١٥ ٩ سم ١٦ ٢٦٠ سم

٢١ س + ص = ١٠ - ٢ + ٢٤ ص = ٠

الاختبار التراكمي

١ د ٢ د ٣ د ٤ ب

٦ أ مستقيم وحيد ب لا يوجد

ج مستقيم وحيد د ٦ مستقيمات

٧ أ عدد لانهائي ب عدد لانهائي ج مستوى واحد

٩ س + ص = ٢ - ٤ + ١٤ ص = ٤٨ - ٠

١١ ١٧٦١، ٨ سم

الوحدة الرابعة: الاحتمال

إجابة بعض تمارين (٤ - ١)

٥ أ {١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠}، ب {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢}

ج {٣، ٩، ١٥}، د {١٠، ٢٠}، و {١، ٢، ٣، ٤}

٩ ج ١٠ د ١١ ب ١٢ د ١٣ د

١٥ ل (أ) = ١/٦ ، ل (ب) = ١/١٨

١٨ أ ٠، ٢ ب ٠، ٤٥ ج ٠، ٥٥

٢٢ ١/٦ ، ٥/٣٦ ، ٥/١٨ ٢٣ ١٣/١٥ ، ٤/١٥ ، ٠، ٤، ٠، ٦، ٠

إجابة بعض التمارين العامة

١ ج ٢ د ٣ ج ٤ أ ٥ أ

٦ د ٧ ج

١١ ل (ب) = ٣، ٠

١٤ ل (أ) = ٣/٨ ل (ب) = ٧/٨ ل (ج) = ١/٢ ل (د) = ١/٤

١٧ أ ٠، ٣٦ ب ٠، ٨٤

١٨ أ ٠، ٢٣٥ ب ٠، ١ ج ٠، ٥٣ د ٠، ٨٢٥

الاختبار التراكمي

١ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٢ {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

٣ {(٢، ص)، (٢، ك)، (٣، ص)، (٣، ك)، (٥، ص)، (٥، ك)}

٤ {(٤، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٢، ٤)}

٥ {١٨، ١٥، ١٢، ٩، ٦، ٣}

٦ {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

٨ أ ٠، ١٥ ب ٠، ٢ ج ٠، ٣

٩ أ ٠، ٣ ب ٠، ٤٥ ج ٠، ٧

١٠ أ ٠، ٢٥ ب ٠، ٣٥ ج ٩١

الاختبار الأول: السؤال الأول

١ أ ٢ ج ٣ د ٤ ج

السؤال الثاني

١ أ = ١، ب = ١

٢ ق = ٣/١٠٠، ر = ٣/١٠٠، ث. جم.

السؤال الرابع:

١ أولا: ٣/٤ ثانياً: ١١/١٢

٢ س + ص = ٢ - ٤ + ١٤ ص = ٤ - ٠

الاختبار الثاني: السؤال الأول:

١ ج ٢ د ٣ ب ٤ ب

السؤال الثاني:

١ ٢٣ ≈ ١/٨ ب ١/٤

السؤال الثالث:

١ ١٢٠ ث. جم، ٩٠ ث. جم

السؤال الرابع :

- ١) $\frac{3}{8}$ أ $\frac{2}{8}$ ب $\frac{7}{8}$ ج
٢) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ ص - ٣ = صفر

الاختبار الثامن: السؤال الأول:

- ١) ج ٢) د ٣) أ ٤) ب

السؤال الثاني:

- ١) $\overline{ف} = \overline{ن^٣ + ن^٢}$ ، $\overline{ف} = ١٨$ ، $\overline{ع} = ٦$ م/ث
٢) $\frac{٨}{٨٠٨}$ ث ب $\frac{٨}{٨٠٨}$ م/ث

السؤال الرابع :

- ١) ١٥ سم ، ٥٤٠ سم^٢
٢) اولاً: ٠,٢ ثانياً: ٠,٩ ثالثاً: ٠,٤

الاختبار التاسع: السؤال الأول:

- ١) ج ٢) أ ٣) ج ٤) ب

السؤال الثاني:

- ١) ١٢,١٢ ، ٣ نيوتن ٢) اثبات

السؤال الثالث :

- ١) ٢ ساعة ٢) ١٦ سم/ث ب ٥٦ سم/ث

الاختبار العاشر: السؤال الأول:

- ١) د ٢) أ ٣) ج ٤) ب

السؤال الرابع :

- ١) ١٤,٦ × ١٠^{١٠} تقريباً ٢) ١٠٠ م^٢/ث^٢ ، ٨٠ م/ث

- ٢) ٦٥١٢ نيوتن ، و د (هـ) = ٤٠.٩٣٠°

الاختبار الثالث: السؤال الأول:

- ١) ج ٢) أ ٣) ب ٤) ج

السؤال الثالث :

- ١) ١٢,٥ ث. جم ، ٧,٥ ث. جم ٢) ٩٦ : ١

الاختبار الرابع: السؤال الأول:

- ١) أ ٢) د ٣) أ ٤) ج

السؤال الثاني:

- ١) $\frac{١}{٦}$ أ $\frac{١}{١٥}$ ب $\frac{١}{٥}$ ج $\frac{١}{٢}$ د
٢) ١٤ اسم

السؤال الثالث:

- ١) (١) ٦٠ ث. كجم ، ١١ ، ٢٣ ، ٩٢
٢) ش_١ = ش_٢ = ٩٣,٧٥ ث. كجم

الاختبار الخامس: السؤال الأول:

- ١) ب ٢) ج ٣) ج ٤) أ

السؤال الثاني:

- ١) ٣٠ كم/س أ ١٥٠ كم/س ب
٢) ٨٢,٦ كم/س $\overline{ي}$

السؤال الثالث:

- ١) $\sqrt{٧٩}$ ، $\sqrt{٧٩}$ نيوتن ٢) ١٦,٨ ث. جم

الاختبار السادس: السؤال الأول:

- ١) أ ٢) ج ٣) ب ٤) د

السؤال الثاني:

- ١) س^٢ + ص^٢ - ع^٢ + ٨ ص - ٥ = ٠
٢) $\frac{١}{٨}$ أ $\frac{١}{٤}$ ب

السؤال الثالث :

- ١) ٩,٨٤٤ م/ث^٢ ٢) ٣٠ وحدة مسافة

الاختبار السابع: السؤال الأول:

- ١) ج ٢) أ ٣) ب ٤) د

السؤال الثالث :

- ١) $\frac{٩٥}{٤}$ سم ٢) ٢٢,٥ متر